

ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ

1.2. Кинематика вращательного движения твёрдого тела

Задача 1.2–01. Колесо радиуса $R = 0,1$ м вращается согласно уравнению:

$$\varphi = A + Bt + Ct^2,$$

где $\varphi(t)$ – угол поворота колеса; $A = \pi/3$ рад; $B = -2\pi$ рад/с; $C = \pi$ рад/с². Какие кинематические характеристики (угловую скорость и угловое ускорение) будет иметь колесо в момент времени $t_1 = 2$ с? Определить для данного момента времени скорость, а также тангенциальное, нормальное и полное ускорения точек, лежащих на ободе колеса.

Дано:

$$\varphi = A + Bt + Ct^2;$$

$$A = \pi/3 \text{ рад};$$

$$B = -2\pi \text{ рад/с};$$

$$C = \pi \text{ рад/с}^2;$$

$$t_1 = 2 \text{ с}.$$

$$\omega(t_1), \varepsilon(t_1) - ?$$

$$V(t_1), a_\tau(t_1), a_n(t_1) - ?$$

РЕШЕНИЕ

План: определить положение колеса в момент времени t_1 ; определить зависимости от времени угловой скорости и углового ускорения колеса; определить значения угловой скорости и углового ускорения в момент времени t_1 ; исследовать характер вращения в момент времени t_1 ; определить кинематические характеристики точек обода колеса в момент времени t_1 ; показать на чертеже векторы скорости и ускорений выбранной точки обода колеса.

1. Определяем положение тела в момент времени t_1 .

Для исследования вращательного движения твёрдого тела достаточно рассмотреть вращение сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси вращения, относительно точки пересечения плоскости и оси. Для рассматриваемого в задаче колеса таким плоским сечением является круг, вращающийся вокруг своего центра O (рис. 1).

Угол поворота φ тела условимся отсчитывать от проходящей через ось вращения горизонтальной плоскости (след OP на рис. 1). Подвижную плоскость для отсчёта угла φ , неизменно связанную с колесом, условимся проводить через радиус круга (след OM на рис. 1). Направление положительного отсчёта угла поворота примем против часовой стрелки.

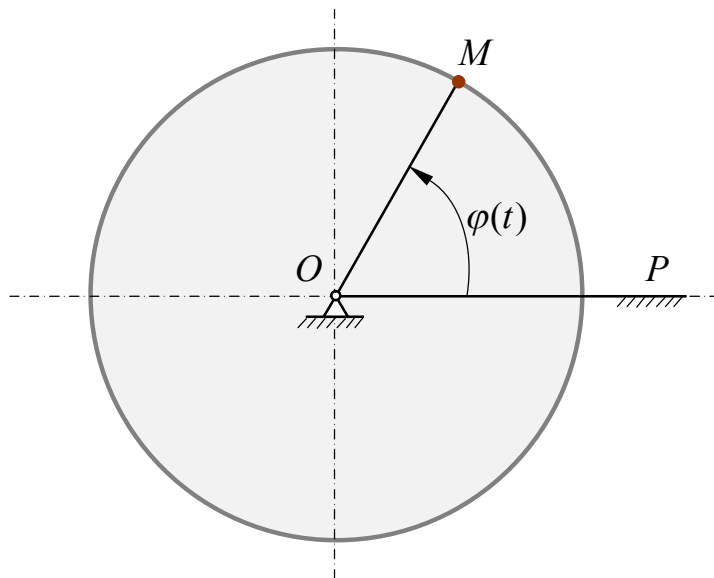


Рис. 1.

Находим значение угла поворота для момента времени t_1 .

$$\varphi(t_1) = A + Bt_1 + Ct_1^2; \quad (1)$$

$$\varphi(t_1) = \frac{\pi}{3} - 2\pi \cdot 2 + \pi \cdot 2^2 = \frac{\pi}{3} \text{ рад} = 60^\circ.$$

2. Определяем зависимость угловой скорости колеса от времени.

$$\omega = \dot{\varphi} = B + 2Ct. \quad (2)$$

Угловая скорость линейно зависит от времени.

3. Определяем зависимость углового ускорения колеса от времени.

$$\varepsilon = \dot{\omega} = 2C. \quad (3)$$

Угловое ускорение не зависит от времени: $\varepsilon = \text{const}$.

4. Определяем числовые значения угловой скорости и углового ускорения в момент времени t_1 и исследуем характер движения.

$$\omega = -2 \cdot 3,14 + 2 \cdot 3,14 \cdot 2 = 2 \cdot 3,14(-1 + 2) = 6,28 \text{ рад/с};$$

$$\varepsilon = 2 \cdot 3,14 = 6,28 \text{ рад/с}^2.$$

$\omega(t_1) > 0$, следовательно, колесо в момент времени t_1 вращается в направлении положительного отсчёта угла поворота, т.е. против часовой стрелки.

$\varepsilon(t_1) > 0$; знаки числовых значений угловой скорости и углового ускорения совпадают, следовательно, в момент времени t_1 колесо совершает ускоренное вращение.

5. Определяем модули кинематических характеристик точек обода колеса в момент времени t_1 .

Поскольку все точки обода имеют одинаковые модули скоростей и ускорений, для их расчёта можно выбрать любую точку, расположенную в плоском сечении на расстоянии R от оси вращения. Выбираем точку M (см. рис. 1).

Модуль скорости точки M :

$$V = \omega R; \quad (4)$$

$$V = 6,28 \cdot 0,1 = 0,628 \text{ м/с.}$$

Модуль тангенциального ускорения точки M :

$$a_\tau = \varepsilon R; \quad (5)$$

$$a_\tau = 6,28 \cdot 0,1 = 0,628 \text{ м/с}^2.$$

Модуль нормального ускорения точки M :

$$a_n = \omega^2 R; \quad (6)$$

$$a_n = 6,28^2 \cdot 0,1 = 3,944 \text{ м/с}^2.$$

Модуль полного ускорения точки M :

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}; \quad (7)$$

$$a = \sqrt{(0,628)^2 + (3,944)^2} = 3,994 \text{ м/с}^2.$$

Основной вклад в полное ускорение точки M вносит нормальное ускорение, т.к. $a_n \gg a_\tau$.

6. Показываем на чертеже направления скорости и ускорений точки M в момент времени t_1 (рис. 2).

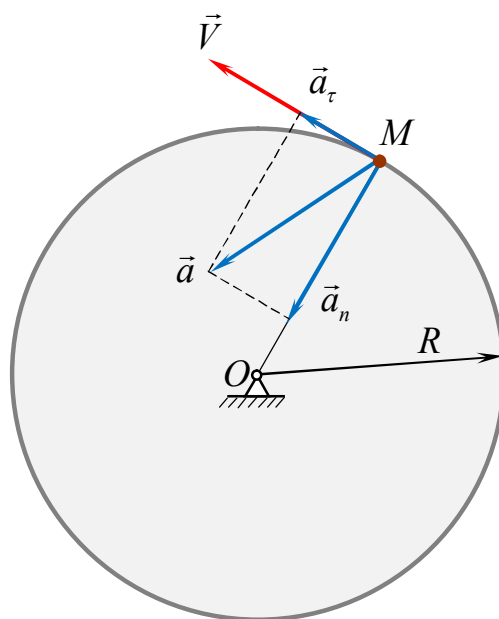


Рис. 2.

Скорость направлена перпендикулярно отрезку OM в сторону вращения диска. Направление тангенциального ускорения при ускоренном движении совпадает с направлением скорости. Нормальное ускорение направлено к центру O , поэтому его называют также центростремительным ускорением. Полное ускорение является геометрической суммой тангенциального и нормального ускорений.

Ответ. В момент времени $t_1 = 2$ с:

- модуль угловой скорости колеса: $\omega = 6,28$ рад/с;
- модуль углового ускорения колеса: $\varepsilon = 6,28$ рад/с²;
- колесо ускоренно вращается в направлении положительного отсчёта угла поворота;
- модуль скорости точек обода колеса: $V = 0,628$ м/с;
- модуль тангенциального ускорения точек обода колеса: $a_\tau = 0,628$ м/с²;
- модуль нормального ускорения точек обода колеса: $a_n = 3,944$ м/с²;
- модуль полного ускорения точек обода колеса: $a = 3,994$ м/с²;
- направления векторов скорости и ускорений показаны на рис. 2.

Иллюстрации: © <http://auditori-um.ru/>