1.1.Кинематика точки

Задача 1.1–04. С вершины сопки, находящейся на высоте $h = 50$ м над поверхностью равнины, произвели орудийный выстрел под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. Модуль начальной скорости снаряда: $V_0 = 800$ м/с. Определить максимальную высоту H подъёма, время τ и дальность s полёта снаряда, а также скорость, тангенциальное и нормальное ускорение снаряда в момент времени $t_1 = 60$ с от начала его движения.

Дано:

$h = 50$ м;

$\alpha = 30^\circ$;

$V_0 = 800$ м/с;

$t_1 = 60$ с.

$H, \tau, s - ?$

$\vec{V}(t_1), \vec{a}_\tau(t_1), \vec{a}_n(t_1) - ?$

Р Е Ш Е Н И Е

План: выбрать систему координат и составить уравнения движения снаряда; определить зависимости от времени проекций скорости снаряда на выбранные оси координат; используя полученные соотношения, определить максимальную высоту подъёма, время и дальность полёта снаряда; определить проекции скорости и кинематические характеристики движения снаряда для заданного момента времени.

1. Рассматриваем снаряд как точку, которая движется в вертикальной плоскости с постоянным ускорением свободного падения $\vec{g}$. Для описания движения снаряда выбираем систему координат Oxy, расположенную в плоскости его движения (рис.1). Точку O начала координат совмещаем с проекцией начальной точки движения снаряда M_0 на горизонтальную плоскость равнины. Ось Ox направляем по поверхности равнины в сторону движения снаряда; ось Oy – вертикально вверх. Составляем схему движения снаряда (рис. 1).

2. Составляем уравнения движения снаряда. Для этого используем общий вид уравнений криволинейного движения точки по плоскости с постоянным ускорением:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + V_{0x}t + \dfrac{a_x t^2}{2}; \\ y(t) = y_0 + V_{0y}t + \dfrac{a_y t^2}{2}. \end{cases} \qquad (1)$$

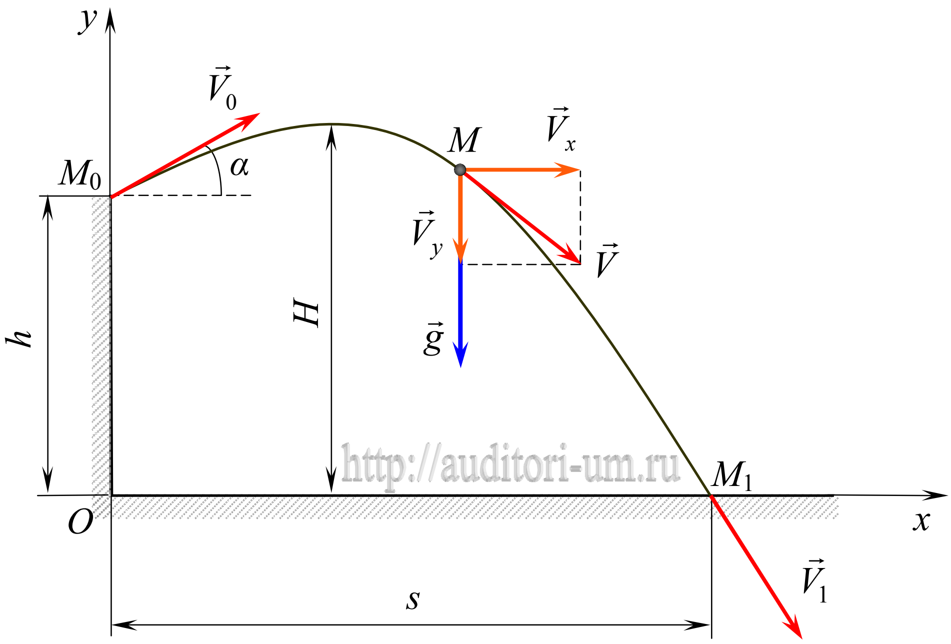

Рис. 1.

Определяем параметры уравнений (1) применительно к данной задаче (см. рис. 1):

– начальные координаты снаряда: $x_0 = 0$ $y_0 = h$;
– проекции начальной скорости $\vec{V}_0$ снаряда:
  $V_{0x} = V_0 \cos\alpha$ (на ось Ox);
  $V_{0y} = V_0 \sin\alpha$ (на ось Oy);
– проекции ускорения $\vec{g}$ снаряда:
  $a_x = 0$ (на ось Ox);
  $a_y = -g$ (на ось Oy).

Подставив найденные значения параметров в уравнения (1), получаем уравнения движения снаряда при заданных условиях:

$$\begin{cases} x(t) = (V_0 \cos\alpha)t; \\ y(t) = h + (V_0 \sin\alpha)t - \dfrac{gt^2}{2}. \end{cases} \tag{2}$$

3. Определяем зависимости от времени проекций скорости снаряда на оси координат:

$$V_x(t) = \dot{x}(t) = V_0 \cos\alpha\,; \tag{3}$$

$$V_y(t) = \dot{y}(t) = V_0 \sin\alpha - g\,t\,. \tag{4}$$

Проекция скорости на ось Ox при движении снаряда не изменяется: $V_x = const$; проекция скорости на ось Oy линейно зависит от времени.

4. Определяем время τ_1 подъёма снаряда на максимальную высоту. В наивысшей точке траектории вертикальная составляющая скорости тела равна нулю. Приравнивая нулю правую часть уравнения (4) для момента времени $t = \tau_1$, получаем уравнение:

$$V_0 \sin\alpha - g\tau_1 = 0. \tag{5}$$

Из уравнения (4) находим:

$$\tau_1 = \frac{V_0 \sin\alpha}{g}\ ; \tag{6}$$

$$\tau_1 = \frac{800 \cdot 0{,}5}{9{,}8} = 40{,}82 \text{ с.}$$

5. Определяем максимальную высоту подъёма снаряда. В выбранной системе координат (см. рис.1) текущая высота подъёма тела над поверхностью земли равна его текущей координате $y(t)$. В наивысшей точке траектории $H = y(\tau_1)$. Подставляя $t = \tau_1$ во второе уравнение системы (2), получаем:

$$H = h + (V_0 \sin\alpha)\tau_1 - \frac{g\tau_1^2}{2}; \tag{7}$$

$$H = 50 + 800 \cdot 0{,}5 \cdot 40{,}82 - \frac{9{,}8 \cdot 40{,}82^2}{2} = 8213 \text{ м.}$$

6. Определяем время полёта снаряда. Для этого можно использовать тот факт, что в момент времени $t = \tau$, когда снаряд падает на землю, его координата $y(\tau) = 0$. Приравнивая нулю правую часть второго из уравнений (2) при $t = \tau$, получаем квадратное уравнение:

$$h + (V_0 \sin\alpha)\tau - \frac{g\tau^2}{2} = 0. \tag{8}$$

Уравнение (8) можно преобразовать к стандартной форме приведённого квадратного уравнения:

$$\tau^2 - \frac{2V_0 \sin\alpha}{g}\tau - \frac{2h}{g} = 0. \tag{9}$$

Учитывая (6), упрощаем запись уравнения (9):

$$\tau^2 - 2\tau_1\tau - \frac{2h}{g} = 0 \; . \qquad (10)$$

Находим корни квадратного уравнения (10) и оставляем только положительный корень, поскольку время – существенно положительная величина. Получаем:

$$\tau = \tau_1 + \sqrt{\tau_1^2 + \frac{2h}{g}} \; ; \qquad (11)$$

$$\tau = 40{,}82 + \sqrt{40{,}82^2 + \frac{2 \cdot 50}{9{,}8}} = 81{,}76 \text{ с.}$$

Примечание. Время полёта снаряда можно также определить как сумму времени τ_1 подъёма и времени τ_2 спуска снаряда с верхней точки траектории. Время спуска с верхней точки траектории равно времени свободного падения без начальной скорости с максимальной высоты:

$$\tau_2 = \sqrt{\frac{2H}{g}} \, .$$

Следовательно

$$\tau = \tau_1 + \sqrt{\frac{2H}{g}} \, . \qquad (12)$$

Нетрудно видеть, что расчеты по формулам (11) и (12) дают одинаковые результаты.

7. Определяем дальность полёта снаряда:

$$s = x(\tau) = (V_0 \cos\alpha)\tau \; ; \qquad (13)$$

$$s = 800 \cdot 0{,}866 \cdot 81{,}76 = 56643 \text{ м.}$$

8. Определяем проекции скорости снаряда для заданного момента времени:

$$V_x = V_0 \cos\alpha = 800 \cdot 0{,}866 = 693 \text{ м/с;}$$

$$V_y = V_0 \sin\alpha - g\,t_1 = 800 \cdot 0{,}5 - 9{,}8 \cdot 60 = -188 \text{ м/с.}$$

9. Определяем скорость снаряда для заданного момента времени. Модуль скорости:

$$V(t) = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}\,; \tag{14}$$

$$V = \sqrt{693^2 + (-188)^2} = 718 \text{ м/с.}$$

Скорость направлена по касательной к траектории в сторону движения. По отношению к системе координат направление скорости можно определить с помощью углов, которые данный вектор составляет с координатными осями (рис. 2).

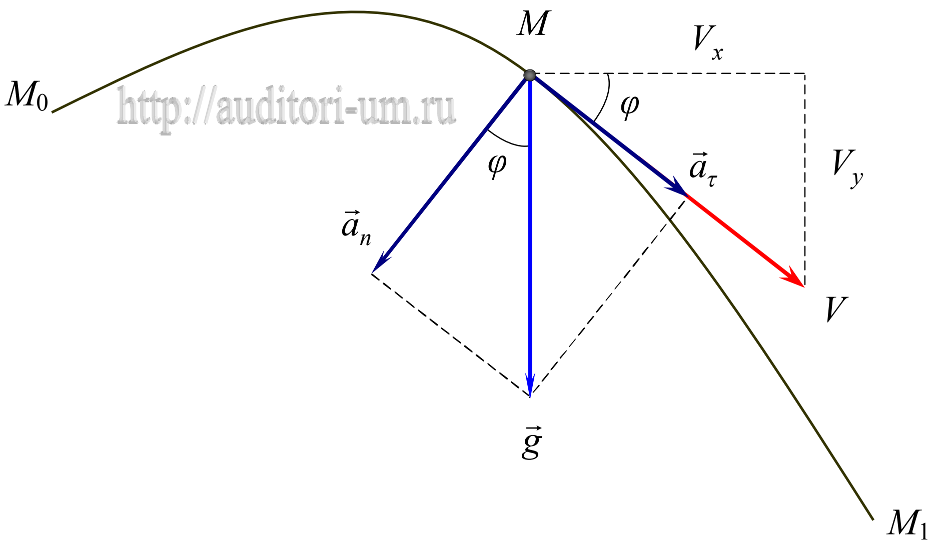

Рис. 2

Определяем угол φ, который вектор скорости составляет в момент времени t_1 с горизонталью (см. рис. 2):

$$tg\varphi = \left|\frac{V_y}{V_x}\right| = \frac{188}{693} = 0{,}2713\,;\ \varphi = 15{,}18^\circ\,.$$

Тригонометрические функции угла φ:

$$\cos\varphi = \left|\frac{V_x}{V}\right| = \frac{693}{718} = 0{,}9652\,;\quad \sin\varphi = \left|\frac{V_y}{V}\right| = \frac{188}{718} = 0{,}2618\,.$$

Примечание. Косинус и синус угла можно определить по значению данного угла с помощью табличных данных, но расчёт по формулам часто бывает предпочтительнее, т.к. для этого не требуется наличия справочного материала. Кроме того, во многих практических расчётах сам угол знать не требуется, а нужны только его тригонометрические функции.

10. Находим величины тангенциального и нормального ускорений снаряда для заданного момента времени (см. рис. 2):

$$a_n = g\cos\varphi; \quad a_\tau = g\sin\varphi; \tag{15}$$

$$a_n = 9{,}8 \cdot 0{,}9652 = 9{,}46 \text{ м/с}^2; \quad a_\tau = 9{,}8 \cdot 0{,}2618 = 2{,}57 \text{ м/с}^2.$$

Направление тангенциального ускорения совпадает с направлением скорости. Это означает, что в заданный момент времени снаряд совершает ускоренное движение (модуль его скорости возрастает). Нормальное ускорение перпендикулярно скорости и направлено в сторону вогнутости траектории.

Ответ:

- максимальная высота подъёма снаряда над поверхностью равнины: $H = 8213$ м;
- время полёта снаряда: $\tau = 81{,}76$ с;
- дальность полёта снаряда: $s = 56643$ м;
- модуль скорости снаряда в момент времени t_1: $V = 718$ м/с; направлена скорость под углом $\varphi = 15{,}18^\circ$ к горизонтали, отсчитанным по часовой стрелке;
- модуль тангенциального ускорения в момент времени t_1: $a_\tau = 2{,}57$ м/с^2; направление тангенциального ускорения совпадает с направлением скорости;
- модуль нормального ускорения в момент времени t_1: $a_n = 9{,}46$ м/с^2; направлено нормальное ускорение под углом $\varphi = 15{,}18^\circ$ к направлению вектора $\vec{g}$ ускорения свободного падения, отсчитанным по часовой стрелке.