

## Объяснение опыта "Исчезающая монета"

Рассмотрим ход световых лучей, отражённых от монеты и проходящих через заполненный водой стакан. Для простоты стакан будем считать цилиндрическим. Выясним, при каких условиях отражённые от монеты лучи не будут наблюдаться через боковые стенки стакана. При построении хода лучей учтём, что между монетой и дном стакана всегда есть прослойка воздуха (рис. 1).

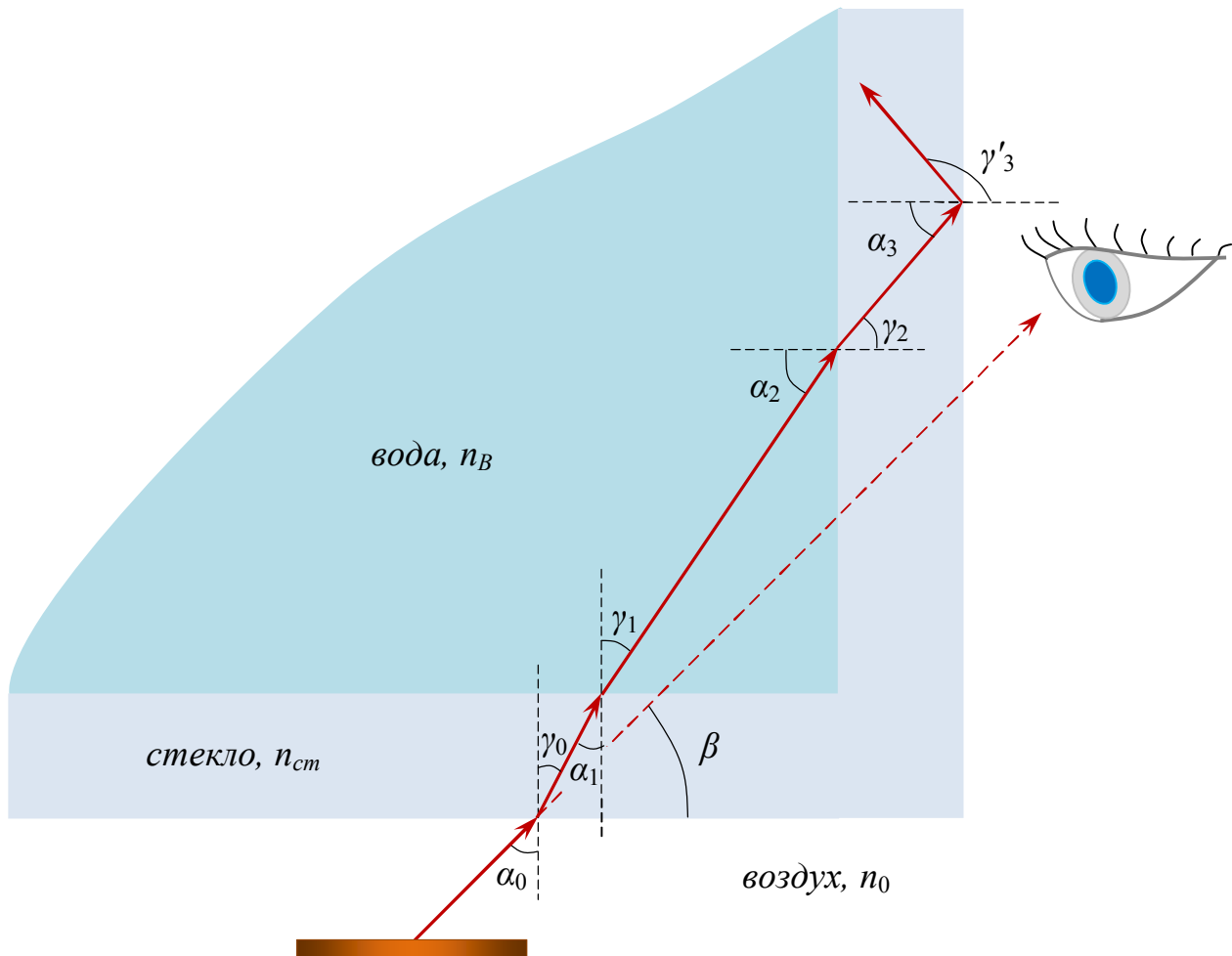


Рис. 1. Схема хода световых лучей при полном внутреннем отражении

Пусть луч, отражённый от какой-либо точки монеты, наблюдается в воздухе под углом  $\alpha_0$  к вертикали или, соответственно, под углом  $\beta$  к горизонтали. Конечно, мы помним свойства прямоугольных треугольников, согласно которым:  $\beta = 90^\circ - \alpha_0$ .

Если поставить на монету стакан, то на границах между воздухом и стеклом, а также между водой и стеклом будут наблюдаться явления отражения и преломления световых лучей. Данные явления обусловлены различиями оптических свойств

граничащих веществ, которые в рамках геометрической оптики описываются с помощью характеристики, называемой абсолютным показателем преломления вещества.

Введём следующие обозначения:  $n_0$  – абсолютный показатель преломления воздуха;  $n_B$  – абсолютный показатель преломления воды;  $n_{cm}$  – абсолютный показатель преломления стекла.

Необходимо выразить синус угла преломления  $\gamma_3$  через синус угла падения  $\alpha_0$  и установить, при каком условии полученные с помощью данного выражения значения превысят единицу. Это и будет условие полного внутреннего отражения.

Нас интересуют только падающие и преломлённые лучи, поэтому только их и будем изображать на схеме (см. рис. 1). При определении углов падения и преломления учтём, что перпендикуляры к горизонтально расположенным границам являются вертикалями, а перпендикуляры к вертикально расположенным границам – горизонталями.

Луч, отражённый от монеты под углом  $\alpha_0$  к вертикали, преломляется на границе между прослойкой воздуха и дном стакана под углом  $\gamma_0$  к вертикали. Согласно закону Снеллиуса:

$$n_0 \sin \alpha_0 = n_{cm} \sin \gamma_0. \quad (1)$$

Отсюда

$$\sin \gamma_0 = \frac{n_0}{n_{cm}} \sin \alpha_0. \quad (2)$$

Преломлённый на первой границе луч падает на следующую границу (между дном стакана и водой) под углом  $\alpha_1$  и преломляется под углом  $\gamma_1$  к вертикали. По закону Снеллиуса:

$$n_{cm} \sin \alpha_1 = n_B \sin \gamma_1. \quad (3)$$

Но  $\alpha_1 = \gamma_0$  (см. рис. 1), поэтому уравнение (3) можно записать следующим образом:

$$n_{cm} \sin \gamma_0 = n_B \sin \gamma_1. \quad (4)$$

Подставив в (4) выражение (2), из полученного уравнения найдем:

$$\sin \gamma_1 = \frac{n_0}{n_B} \sin \alpha_0. \quad (5)$$

Луч, преломлённый в воде под углом  $\gamma_1$  к вертикали, падает на внутреннюю боковую стенку стакана под углом  $\alpha_2$  к горизонтали. На границе между водой и стеклом боковой стенки этот луч преломляется под углом  $\gamma_2$  к горизонтали. Применим к этой границе закон Снеллиуса:

$$n_B \sin \alpha_2 = n_{cm} \sin \gamma_2. \quad (6)$$

С помощью известных соотношений выразим  $\sin \alpha_2$  через  $\sin \gamma_1$ :

$$\sin \alpha_2 = \cos \gamma_1 = \sqrt{1 - \sin^2 \gamma_1}. \quad (7)$$

Подставим (7) в (6) и из полученного уравнения выразим  $\sin \gamma_2$  через  $\sin \gamma_1$ :

$$\sin \gamma_2 = \frac{n_B}{n_{cm}} \sqrt{1 - \sin^2 \gamma_1}. \quad (8)$$

Наконец, подставим в (8) выражение (2):

$$\sin \gamma_2 = \frac{n_B}{n_{cm}} \sqrt{1 - \left(\frac{n_0}{n_B}\right)^2 \sin^2 \alpha_0}. \quad (9)$$

Луч, преломлённый под углом  $\gamma_2$ , падает на границу между стеклом боковой стенки стакана и воздухом под углом  $\alpha_3$  и преломляется под углом  $\gamma_3$  (или испытывает полное внутреннее отражение под углом  $\gamma'_3$ ) к горизонтали. Предположим, что данный луч на внешней границе преломляется. Тогда по закону Снеллиуса:

$$n_{cm} \sin \alpha_3 = n_0 \sin \gamma_3. \quad (10)$$

Сделаем в (10) замену  $\sin \alpha_3 = \sin \gamma_2$  и воспользуемся соотношением (9). Получим уравнение:

$$n_B \sqrt{1 - \left(\frac{n_0}{n_B}\right)^2 \sin^2 \alpha_0} = n_0 \sin \gamma_3. \quad (11)$$

Отсюда:

$$\sin \gamma_3 = \sqrt{\left(\frac{n_B}{n_0}\right)^2 - \sin^2 \alpha_0}. \quad (12)$$

Формула (12) не очень удобна для анализа, поскольку угол  $\alpha_0$  отсчитывается от вертикали, а угол  $\gamma_3$  – от горизонтали. Поэтому воспользуемся соотношением

$$\sin^2 \alpha_0 = 1 - \cos^2 \beta \quad (13)$$

и выразим  $\sin \gamma_3$  через косинус угла наблюдения  $\beta$ :

$$\sin \gamma_3 = \sqrt{\left(\frac{n_B}{n_0}\right)^2 - 1 + \cos^2 \beta}. \quad (14)$$

Синус любого угла не может превышать единицу, поэтому соотношение (14) имеет смысл только при условии:

$$f(\beta) = \sqrt{\left(\frac{n_B}{n_0}\right)^2 - 1 + \cos^2 \beta} \leq 1. \quad (15)$$

Если условие (15) выполняется, то лучи, которые наблюдаются в воздухе под углом  $\beta$ , будут видны через боковую стенку стакана с водой под углом  $\gamma_3$  к горизонтали (рис. 2). Если же

$$f(\beta) = \sqrt{\left(\frac{n_B}{n_0}\right)^2 - 1 + \cos^2 \beta} > 1, \quad (16)$$

то будет наблюдаться полное внутренне отражение, как показано на рис. 1.

Если при некотором критическом значении угла  $\beta = \beta_{KP}$

$$f(\beta_{KP}) = \sqrt{\left(\frac{n_B}{n_0}\right)^2 - 1 + \cos^2 \beta_{KP}} = 1, \quad (17)$$

то падающий на внешнюю границу луч будет преломляться под углом  $\gamma_3 = 90^\circ$  к горизонтали, т.е. будет идти параллельно вертикальной стенке стакана. С помощью (17) найдем соотношение для определения критического значения угла наблюдения:

$$\beta_{KP} = \arccos \sqrt{2 - \left(\frac{n_B}{n_0}\right)^2}. \quad (18)$$

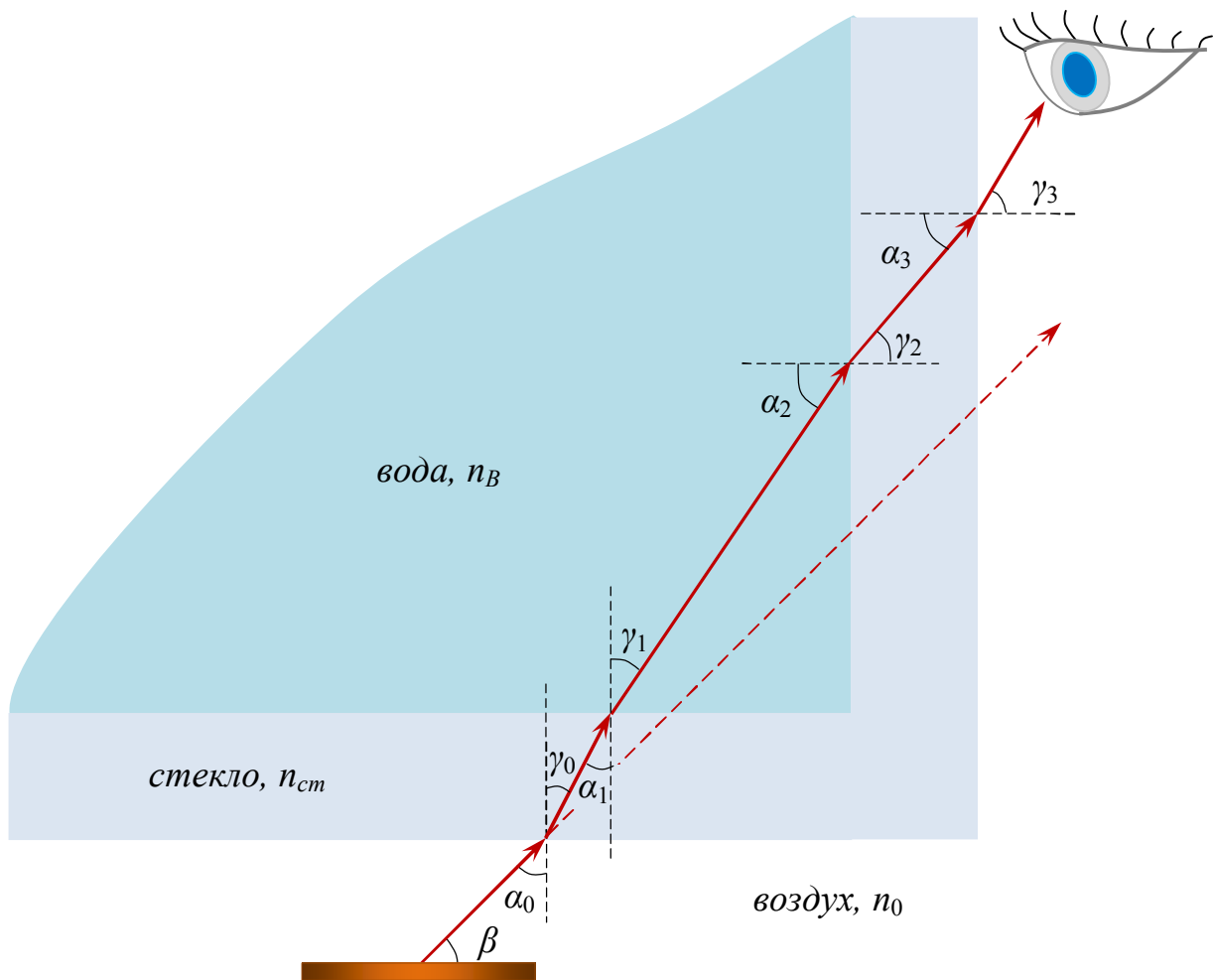


Рис. 2. Наблюдение монеты при отсутствии полного внутреннего отражения

Для дальнейших расчётов возьмём стандартные значения абсолютных показателей преломления:  $n_{cm} = 1,50$ ,  $n_B = 1,33$ ,  $n_0 = 1,00$ . Выполним по формуле (18) расчёт критического угла наблюдения. Получим:

$$\beta_{KP} = 61,27^\circ .$$

Выясним, как ведёт себя функция  $f(\beta)$ . Для этого построим график этой функции при изменении угла наблюдения  $\beta$  от 0 до  $90^\circ$  (рис. 3). Видим, что при углах  $\beta < \beta_{KP}$  значения функции  $f(\beta) > 1$ . Это означает, что отражённые лучи, идущие от монеты под углами к горизонтали, меньшими критического угла, не видны через боковую стенку стакана с водой. Т.е. при  $\beta < \beta_{KP}$  на внешней границе боковой поверхности стакана наблюдается явление полного внутреннего отражения.

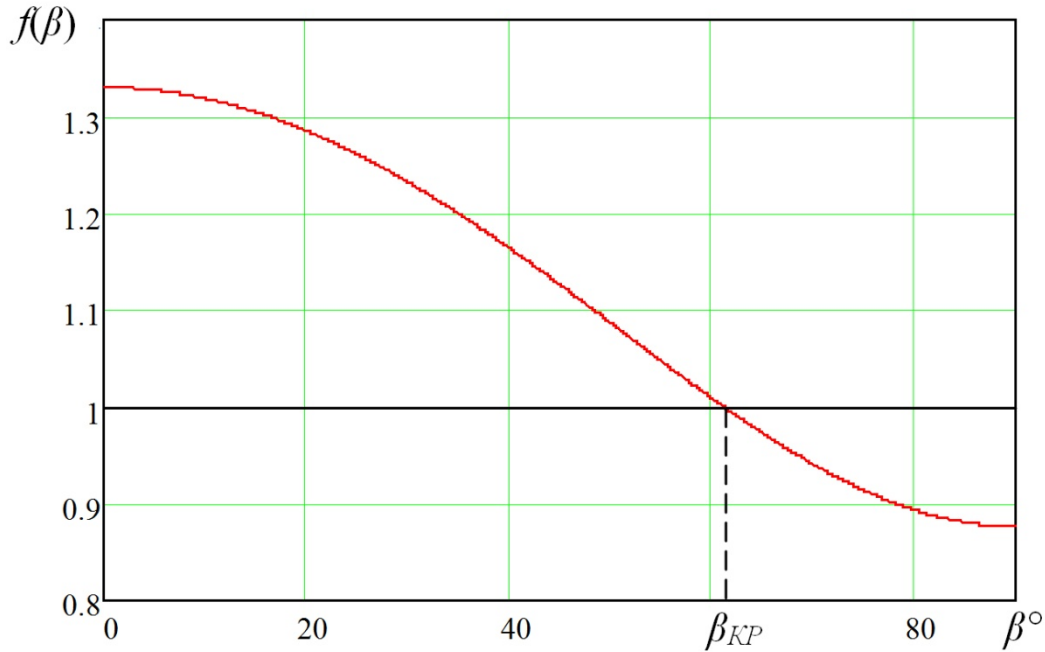


Рис. 3. График зависимости  $f(\beta)$

Отражённые лучи, идущие от монеты под углами  $\beta > \beta_{KP}$ , видны через боковую стенку стакана под углами  $\gamma_3$  (см. рис. 2). С помощью формулы (18) получим:

$$\beta = \arccos \sqrt{1 - \left(\frac{n_B}{n_0}\right)^2 + \sin^2 \gamma_3} . \quad (19)$$

Исследуем зависимость  $\beta(\gamma_3)$ , график которой показан на рис. 4.

Угол  $\gamma_3$  снизу ограничен некоторым предельным значением  $\gamma_{np}$ , причём  $\beta \rightarrow 90^\circ$  при  $\gamma_3 \rightarrow \gamma_{np}$ . Поскольку  $\cos 90^\circ = 0$ , приравняем нулю подкоренное выражение в (19), положив в нём  $\gamma_3 = \gamma_{np}$ :

$$1 - \left(\frac{n_B}{n_0}\right)^2 + \sin^2 \gamma_{np} = 0 . \quad (20)$$

Отсюда

$$\gamma_{np} = \arcsin \sqrt{\left(\frac{n_B}{n_0}\right)^2 - 1} = \arccos \sqrt{2 - \left(\frac{n_B}{n_0}\right)^2} . \quad (21)$$

Видим, что  $\gamma_{np} = \beta_{KP}$ .

По мере увеличения угла  $\gamma_3$  от критического значения до  $90^\circ$  угол  $\beta$  уменьшается (рис. 4). Что это означает?

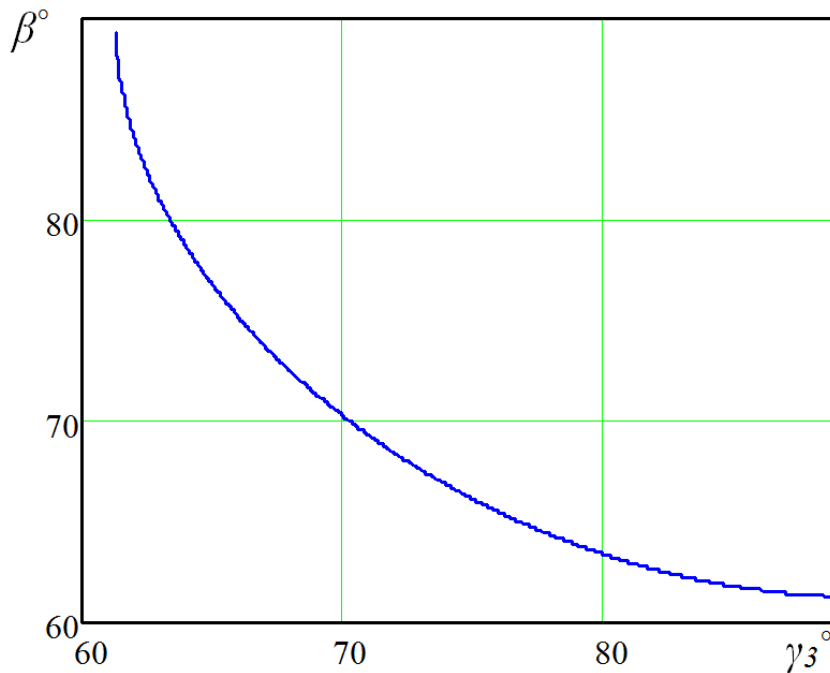


Рис. 4. График зависимости угла наблюдения  $\beta$  в воздухе от угла наблюдения  $\gamma_3$  через боковую стенку стакана

Когда мы смотрим на боковую стенку стакана под углами  $\gamma_3$ , незначительно превышающими предельное значение, то мы видим лучи, отраженные от монеты под углами  $\beta$ , близкими к  $90^\circ$ . Т.е. мы видим монету как бы повернутой к нам лицевой стороной, как будто мы смотрим на неё сверху. Например, глядя через стакан с водой под углом  $\gamma_3 = 63^\circ$ , мы видим монету так, как если бы наблюдали в её воздухе под углом  $\beta = 81^\circ$ .

Но когда мы пытаемся через боковую стенку стакана с водой посмотреть на монету сверху, увеличивая угол  $\gamma_3$ , то она как бы поворачивается к нам боковой стороной. Например, глядя через стакан с водой под углом  $\gamma_3 = 85^\circ$ , мы видим тот ракурс монеты, который наблюдали бы в воздухе под углом  $\beta = 62^\circ$ .

Следует отметить ещё одно обстоятельство. Ни в одно из полученных соотношений не входит показатель преломления стекла. Чем это объясняется? Дело в том, что отражённые от монеты лучи проходят стекло дважды со сменой чередования слоёв: воздух-стекло-вода (на входе) и вода-стекло-воздух (на выходе). Тем самым влияние слоя стекла на изменение направлений лучей компенсируется. А слой воды лучи проходят один раз. Поэтому эффект "исчезновения" монеты наблюдается только, если стакан наполнен водой. Действительно, пустой стакан, как легко проверить, такого эффекта не вызывает.

Выводы.

1. Лучи, отражённые от монеты в воздухе под углами к горизонтали  $\beta < \beta_{KP}$ , не видны через боковую стенку стакана с водой вследствие полного внутреннего отражения на границе между стеклом стакана и воздухом. Этим и объясняется "исчезновение" монеты при установке на неё стакана с водой.
2. Лучи, отражённые от монеты в воздухе под углами к горизонтали  $\beta > \beta_{KP}$ , видны через боковую стенку стакана с водой, но наблюдаются они под углами  $\gamma_3$  к горизонтали, причём  $\gamma_{np} < \gamma_3 < 90^\circ$ .
3. Предельное значение  $\gamma_{np}$  угла наблюдения через боковую стенку стакана с водой равно критическому значению  $\beta_{KP}$  отражённых от монеты лучей.
4. Чем больше угол наблюдения  $\gamma_3$  через боковую стенку стакана с водой, тем меньше угол  $\beta$ , под которым видно изображение монеты.
5. Все отмеченные эффекты определяются только прохождением лучей через слой воды, но не зависят от их прохождения через стекло стакана, если оно достаточно тонкое и однородное.

Примечание. Сделанные выводы справедливы в рамках геометрической оптики. Здесь не рассмотрены такие явления, как дифракция на неоднородностях, поглощение, рассеяние света и др. Вследствие перечисленных явлений, которые описываются волновой оптикой, изображение монеты, видимое через стакан с водой, предстает сильно искаженным и ослабленным по сравнению с тем, что мы видим в воздухе. Взаимодействие света со стеклом стакана может сильно повлиять на результаты наблюдений, если стекло толстое и неоднородное.