

## ПРИМЕРЫ

### построения эпюр внутренних силовых факторов

#### 2. Шарнирно закреплённые балки

Балка, закреплённая с помощью шарниров, должна иметь не менее двух точек опоры. Поэтому в случае шарнирно закреплённых (шарнирно опёртых) балок определение реакций опор является обязательным этапом, необходимым для построения эпюр внутренних силовых факторов.

**Пример.** Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для шарнирно закреплённой балки, изображённой на рис 2.1.

**Дано:**  $q = 3$  кН/м;  $F = 2$  кН;  $M = 15$  кН·м;  $a = 1$  м.

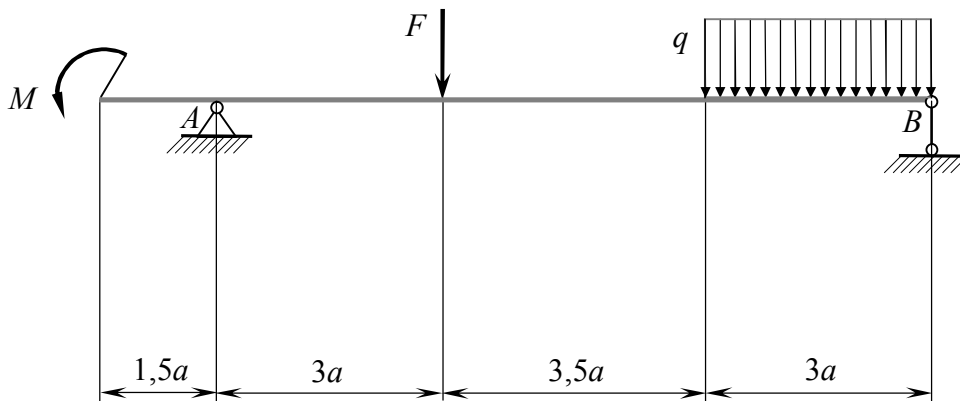


Рис. 2.1. Расчётная схема балки

#### Определение реакций опор

Неподвижный шарнир в точке  $A$  создаёт сосредоточенную силу – реакцию, которая в общем случае раскладывается на две неизвестных составляющих. Подвижный шарнир (шарнирно закреплённый стержень) в точке  $B$  создаёт одну реакцию – сосредоточенную силу, направленную вдоль оси стержня. Общее число неизвестных реакций не превышает числа уравнений статики плоской системы сил. Рассматриваемая балка статически определима.

На балку действуют следующие активные силы: сосредоточенная сила  $\vec{F}$ , пара сил с моментом  $M$  и равномерно распределённая нагрузка интенсивности  $q$ .

Заменяем распределённую нагрузку её равнодействующей  $\vec{P}$ . Определяем величину равнодействующей распределённой нагрузки:

$$P = q \cdot 3a = 9 \text{ кН.}$$

Сила  $\vec{P}$  приложена в точке, расположенной на середине участка действия равномерно распределенной нагрузки, и направлена вертикально вниз.

Освобождаем балку от связей и заменяем их действие реакциями. Реакцию неподвижного шарнира  $A$  раскладываем на горизонтальную  $\vec{H}_A$  и вертикальную  $\vec{V}_A$  составляющие.

Составляем расчётную схему для определения неизвестных реакций (рис. 2.2). Из соображений удобства выбираем систему координат  $x, y$  с началом в точке  $O$ , находящейся на левом конце балки (рис. 2.2).

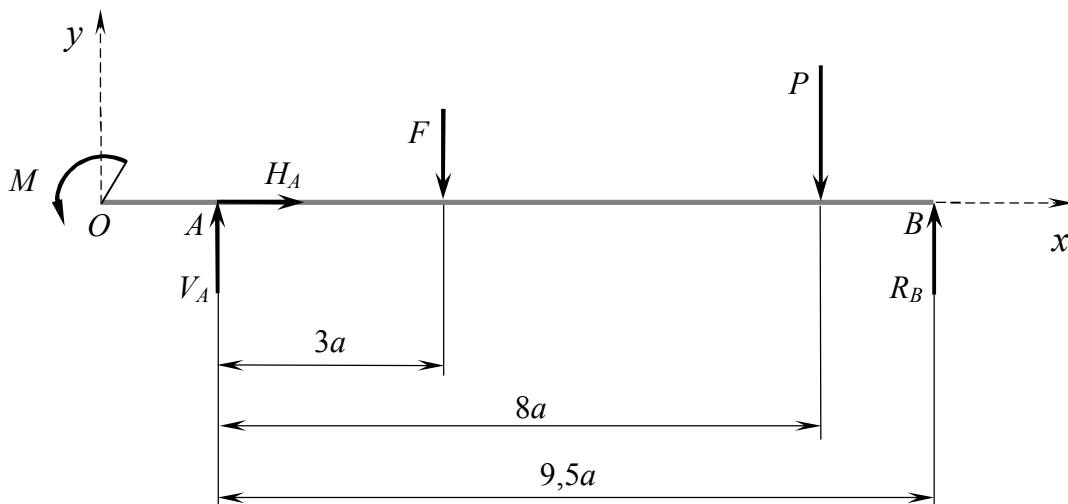


Рис. 2.2. Расчётная схема для определения реакций опор

Составляем уравнения равновесия плоской системы сил.

Первое уравнение (сумма проекций всех активных сил и реакций связей на ось  $x$  равна нулю):

$$\sum F_{ix} = 0; \quad H_A = 0. \quad (2.1)$$

Второе уравнение (сумма моментов всех активных сил и реакций связи относительно точки  $A$  равна нулю):

$$\sum M_{Ai} = 0; \quad -M + F \cdot 3a + P \cdot 8a - R_B \cdot 9,5a = 0. \quad (2.2)$$

Из уравнения (2.2) находим:

$$R_B = \frac{-M + P \cdot 8a + F \cdot 3a}{9,5a} = 6,63 \text{ кН.}$$

Третье уравнение (сумма проекций всех активных сил и реакций связей на ось  $y$  равна нулю):

$$\sum F_{iy} = 0; \quad V_A - F - P + R_B = 0. \quad (2.3)$$

Из уравнения (2.3) находим:

$$V_A = F + P - R_B = 4,37 \text{ кН.}$$

### Проверка

Для проверки определяем сумму моментов всех активных сил и найденных реакций связей относительно точки  $O$  и выполняем расчёт:

$$\sum M_{O_i} = -M - V_A \cdot 1,5 \cdot a + F \cdot 4,5 \cdot a + P \cdot 9,5 \cdot a - R_B \cdot 11 \cdot a = 0.$$

Равенство нулю вычисленной суммы моментов подтверждает правильность определения реакций опор.

### **Определение поперечных сил и изгибающих моментов**

Устанавливаем и нумеруем характерные точки балки. Из соображений удобства будем выделять части балки, начиная от её левого конца. Поэтому характерные точки балки нумеруем слева направо (рис. 2.3а): точка приложения пары сил с моментом  $M$  (точка 1), точка приложения реакции  $R_A$  (точка 2), точка приложения сосредоточенной силы  $F$  (точка 3), левая граница участка действия распределённой нагрузки (точка 4), правая граница участка действия распределённой нагрузки и точка действия реакции  $R_B$  (точка 5).

Разбиваем ось  $Ox$  на участки – диапазоны значений координаты  $x$ :

- участок 1–2 ( $0 \leq x \leq 1,5a$ );
- участок 2–3 ( $1,5a \leq x \leq 4,5a$ );
- участок 3–4 ( $4,5a \leq x \leq 8,0a$ );
- участок 4–5 ( $8,0a \leq x \leq 11,0a$ ).

Рассматривая каждый участок по отдельности и выделяя с помощью текущего сечения соответствующие части балки, определяем зависимости внутренних силовых факторов от координаты  $x$  и их граничные значения.

При вычислении поперечных сил положительной считается та внешняя сила, которая обходит сечение по часовой стрелке. Для удобства вычислений будем проводить через каждое текущее сечение балки вспомогательную ось  $y'$ , направленную вертикально вверх. Тогда поперечная сила в сечении будет равна сумме проекций на ось  $y'$  всех внешних сил, действующих на выделенную часть балки.

Изгибающий момент в сечении равен сумме моментов внешних сил относительно центра тяжести сечения выделенной части балки. Если сечение находится справа, то положительным считается действие по часовой стрелке.

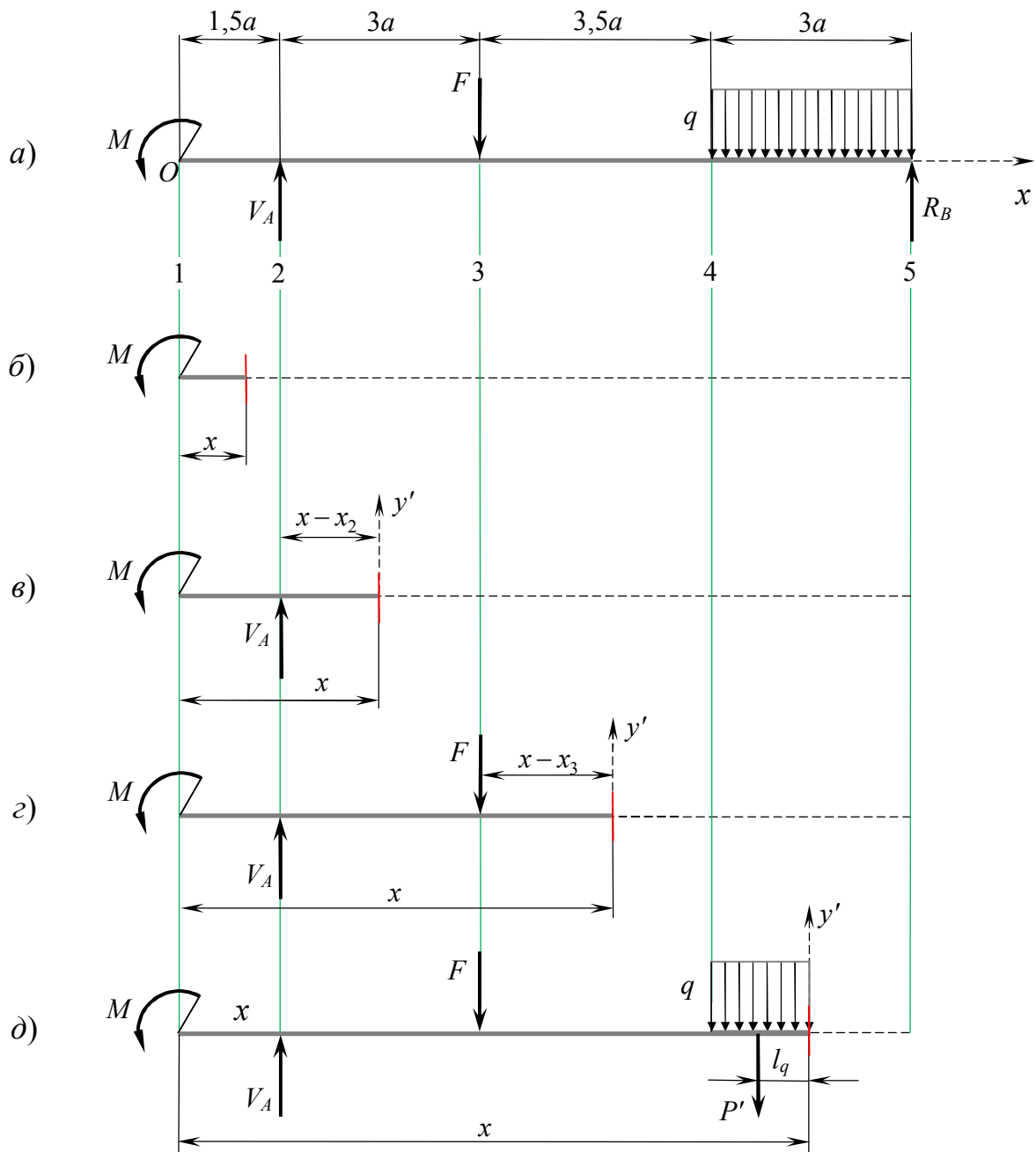


Рис. 2.3. Выделение участков балки

Плечо  $l_i$  сосредоточенной силы относительно центра тяжести сечения можно определить как разность координаты  $x$  сечения и координаты  $x_i$  точки приложения силы (см. рис. 2.3):

$$l_i = x - x_i. \quad (2.4)$$

#### Участок 1–2 (рис. 2.3б)

Рассматриваем равновесие части балки, ограниченной слева сечением с координатой  $x_1 = 0$ , а справа – текущим сечением с координатой  $x$ , изменяющейся от  $x_1$  (точка 1) до  $x_2 = 1,5a$  (точка 2).

Внешние сосредоточенные и распределённые силы на данную часть балки не действуют, поэтому независимо от выбранного сечения поперечная сила равна нулю:  $Q_y \equiv 0$ . Значения поперечных сил на границах участка:

$$Q_{y1} = 0; \quad Q_{y2} = 0.$$

На левой границе выделенной части балки действует пара сил с моментом  $M$ . Данная пара сил действует против часовой стрелки, поэтому её момент будем брать со знаком минус. Другие внешние силы на выделенную часть балки не действуют. Следовательно, независимо от выбранного сечения изгибающий момент равен взятому со знаком минус моменту пары:  $M_z = const = -M$ . Значения изгибающих моментов на границах участка:

$$M_{z1} = -M = -15 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_{z2} = -M = -15 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

#### Участок 2–3 (рис. 2.3в)

Рассматриваем равновесие части балки, ограниченной слева сечением с координатой  $x_1 = 0$ , а справа – текущим сечением с координатой  $x$ , изменяющейся от  $x_2 = 1,5a$  (точка 2) до  $x_3 = 4,5a$  (точка 3).

На выделенную часть балки действуют: пара сил с моментом  $M$  и реакция  $V_A$ . Поперечная сила в сечении равна проекции реакции  $V_A$  на ось  $y'$ :  $Q_y \equiv V_A$ . Граничные значения поперечных сил:

$$Q'_{y2} = V_A = 4,37 \text{ кН}; \quad Q_{y3} = V_A = 4,37 \text{ кН}.$$

На участке 2–3 поперечная сила не зависит от координаты  $x$  сечения. При переходе от участка 1–2 к участку 2–3 в точке 2 наблюдается скачок поперечной силы.

Моменты относительно центра тяжести сечения создают: приложенная в точке 1 пара сил, и реакция  $V_A$ . Реакция  $V_A$  действует относительно расположенного справа сечения по часовой стрелке, поэтому её момент берём со знаком плюс.

Вычисляя сумму моментов внешних сил относительно центра тяжести сечения, находим выражение для текущего значения изгибающего момента:

$$M_z(x) = -M + V_A(x - x_2). \quad (2.5)$$

Изгибающий момент в рассматриваемом диапазоне координаты  $x$  изменяется по линейному закону.

Подставляя в (2.5) граничные значения координаты:  $x = 1,5a$  и  $x = 4,5a$ , вычисляем изгибающий момент на границах участка:

$$M'_{z2} = -15 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_{z3} = -1,90 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

При переходе от участка 1–2 к участку 2–3 скачка изгибающего момента нет, поэтому  $M_{z2} = M'_{z2}$ .

#### Участок 3–4 (рис. 1.3z)

Рассматриваем равновесие части балки, ограниченной слева сечением с координатой  $x_1 = 0$ , а справа – текущим сечением с координатой  $x$ , изменяющейся от  $x_3 = 4,5a$  (точка 3) до  $x_4 = 8,0a$  (точка 4).

На выделенную часть балки действуют: пара сил с моментом  $M$ , реакция  $V_A$  и сосредоточенная сила  $F$ . Поперечная сила в сечении равна сумме проекций всех внешних сил на вспомогательную ось  $y'$ :

$$Q_y = V_A - F = \text{const}. \quad (2.6)$$

Подставляя в (2.6) данные из условия задачи вычисляем граничные значения поперечной силы:

$$Q'_{y3} = 4,37 - 2,0 = 2,37 \text{ кН}; \quad Q_{y4} = Q'_{y3} = 2,37 \text{ кН}.$$

При переходе от участка 2–3 к участку 3–4 в точке 3 наблюдается скачок поперечной силы.

Моменты относительно центра тяжести сечения создают: приложенная в точке 1 пара сил, реакция  $V_A$  и сила  $F$ . Вычисляя сумму моментов внешних сил относительно центра тяжести сечения, находим выражение для текущего значения изгибающего момента:

$$M_z(x) = -M + V_A(x - x_2) - F(x - x_3). \quad (2.7)$$

Изгибающий момент на участке 3–4 изменяется по линейному закону.

Подставляя в (1.5) граничные значения координаты:  $x = 4,5a$  и  $x = 8,0a$ , вычисляем изгибающий момент на границах участка:

$$M'_{z3} = -1,90 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_{z4} = 6,40 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

При переходе от участка 1–2 к участку 2–3 скачка изгибающего момента нет, поэтому  $M_{z3} = M'_{z3}$ .

#### Участок 4–5 (рис. 2.3д)

Рассматриваем равновесие части балки, ограниченной слева сечением с координатой  $x_1 = 0$ , а справа – текущим сечением с координатой  $x$ , изменяющейся от  $x_4 = 8,0a$  (точка 4) до  $x_5 = 11,0a$  (точка 5).

На выделенную часть балки действуют: пара сил с моментом  $M$ , реакция  $V_A$ , сосредоточенная сила  $F$  и равномерно распределённая нагрузка на участке от точки 4 до текущего сечения. Длина участка действия распределённой нагрузки (см. рис. 1.3д):

$$l_q(x) = x - x_4. \quad (2.8)$$

Равнодействующая распределённой нагрузки:

$$P'(x) = q(x - x_4). \quad (2.9)$$

Вычисляя сумму проекций всех внешних сил на вспомогательную ось  $y'$ , находим выражение для текущего значения поперечной силы в сечении:

$$Q_y(x) = V_A - F - q(x - x_4). \quad (2.10)$$

С помощью (2.10) находим граничные значения поперечной силы при  $x = x_4$  и  $x = x_5$ :

$$Q'_{y4} = 2,37 \text{ кН}; \quad Q_{y5} = -6,63 \text{ кН}.$$

Моменты относительно центра тяжести сечения создают: пара сил, сосредоточенная сила  $F$ , распределённая нагрузка, которые действуют против часовой стрелки, и реакция  $V_A$ , которая действует по часовой стрелке. С учётом правила знаков определяем выражение для текущего значения изгибающего момента в сечении:

$$M_z(x) = -M + V_A(x - x_2) - F(x - x_3) - q \frac{(x - x_4)^2}{2}. \quad (2.11)$$

Подставляя в (2.11) значения координаты  $x$  на границах участка, вычисляем граничные значения изгибающего момента:

$$M'_{z3} = 6,40 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_{z4} = 0 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

При переходе от участка 2–3 к участку 3–4 скачков поперечной силы и изгибающего момента нет, поэтому  $Q_{z3} = Q'_{z3}$ ;  $M_{z3} = M'_{z3}$ .

### Проверка

Для проверки расчёта внутренних силовых факторов выделяем справа часть балки на участке 5–4 (рис. 2.4б). В этом случае сечение находится слева, поэтому вспомогательную ось  $y'$  проводим вертикально вниз, чтобы силы, имеющие положительную проекцию на эту ось, обходили сечение по часовой стрелке.

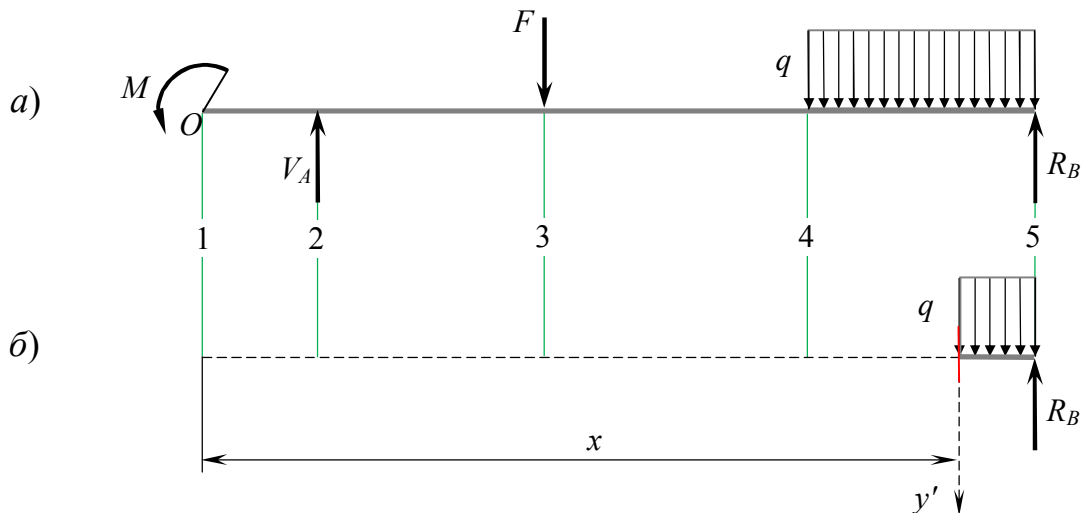


Рис. 2.3. Выделение участка балки справа для проверки



Находим выражения для текущих значений поперечной силы и изгибающего момента на участке 5–4:

$$Q_{yr}(x) = -R_B + q(x_5 - x); \quad (2.12)$$

$$M_{zr}(x) = R_B(x_5 - x) - q \frac{(x_5 - x)^2}{2}. \quad (2.13)$$

Выполняя расчёт по формулам (2.12), (2.13), убеждаемся, что граничные значения внутренних силовых факторов соответствуют их ранее найденным значениям:

$$Q_{yr}(x_4) = Q_{y4} = 2,37 \text{ кН}; \quad Q_{yr}(x_5) = Q_{y5} = -6,63 \text{ кН};$$

$$M_{zr}(x_4) = M_{z4} = 6,40 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_{zr}(x_5) = M_{z5} = 0 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Равенство нулю изгибающего момента на правой границе балки является дополнительным подтверждением правильности полученных результатов, поскольку на этой границе сосредоточенные пары сил не действуют.

#### Нахождение экстремума изгибающего момента

Изгибающий момент на участке 4–5 изменяется по параболическому закону (2.11). Парабола (2.11) имеет максимум в той точке, где график поперечной силы пересекает ось  $x$ .

Приравнивая нулю выражение (2.10) для поперечной силы, получаем уравнение:

$$V_A - F - q(x_m - x_4) = 0. \quad (2.14)$$

Из уравнения (2.14) находим координату экстремума:

$$x_m = \frac{V_A - F + q x_4}{q} = 7,79 \text{ м}.$$

Подставив найденное значение  $x_m$  координаты экстремума в выражение (2.11), находим максимальное значение изгибающего момента на участке 4–5:

$$M_z^{\max} = -M + V_A(x_m - x_2) - F(x_m - x_3) - q \frac{(x_m - x_4)^2}{2} = 7,33 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

## Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов

Выбираем масштабы для построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов и строим их эпюры (рис. 2.5).

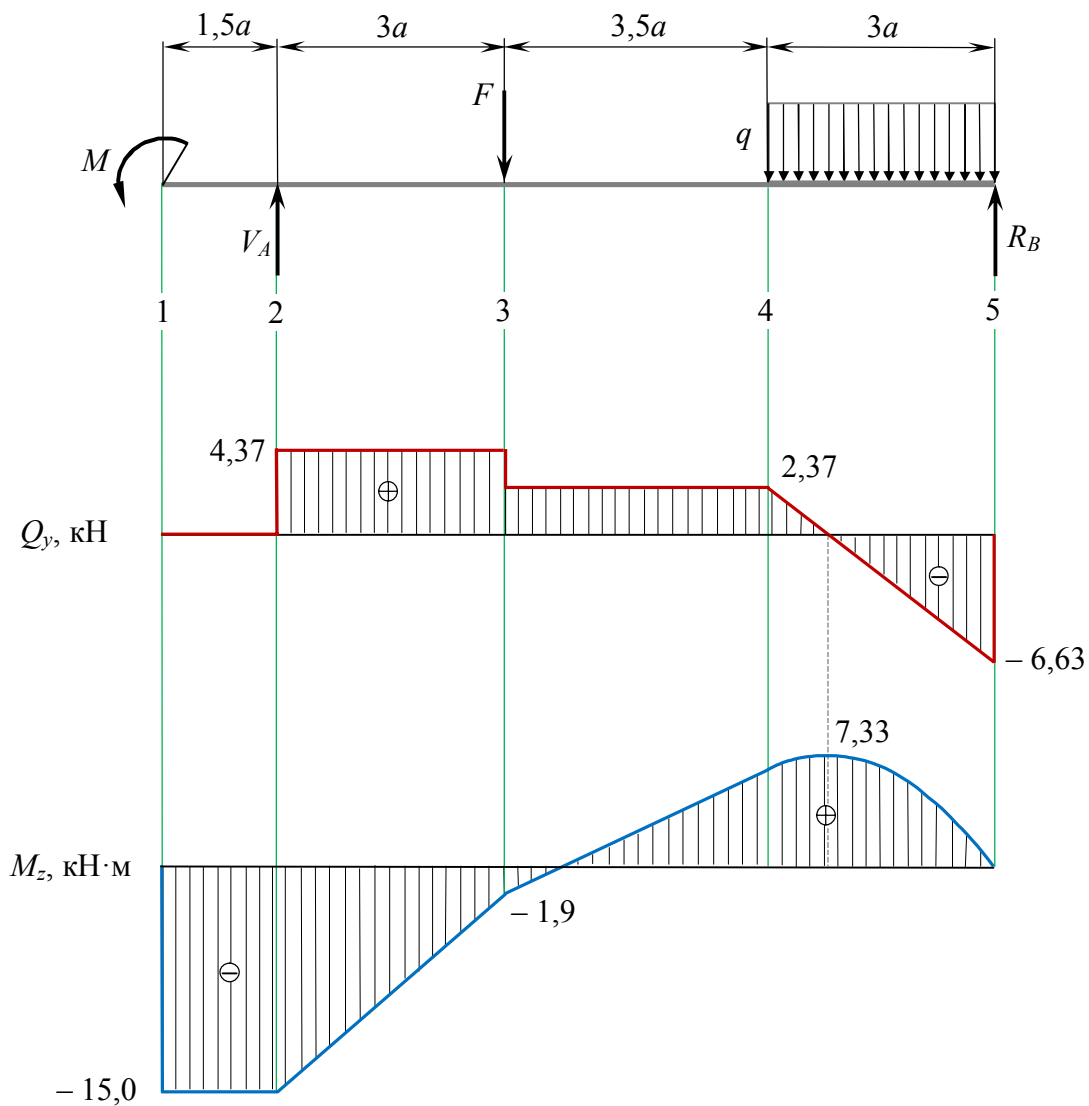


Рис. 2.5. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов