Приложение 9. Примеры вычисления работы силы

Работа силы тяжести

Пусть некоторое тело массой *m* перемещается в однородном поле тяжести из положения 1 в положение 2 (рис. П9.1). При этом высота центра тяжести тела относительно некоторого произвольно выбранного горизонтального уровня изменяется на величину *h*.

Выберем систему координат *Oxyz*, одну из осей которой, например ось *Oz* направим вертикально вверх (рис. П9.1). Выделенной в этом случае является ось *Oz*, а оси *Ox* и *Oy* служат для задания горизонтального уровня отсчёта координаты *z*. Поэтому на рисунке П9.1 показана только одна из этих осей.

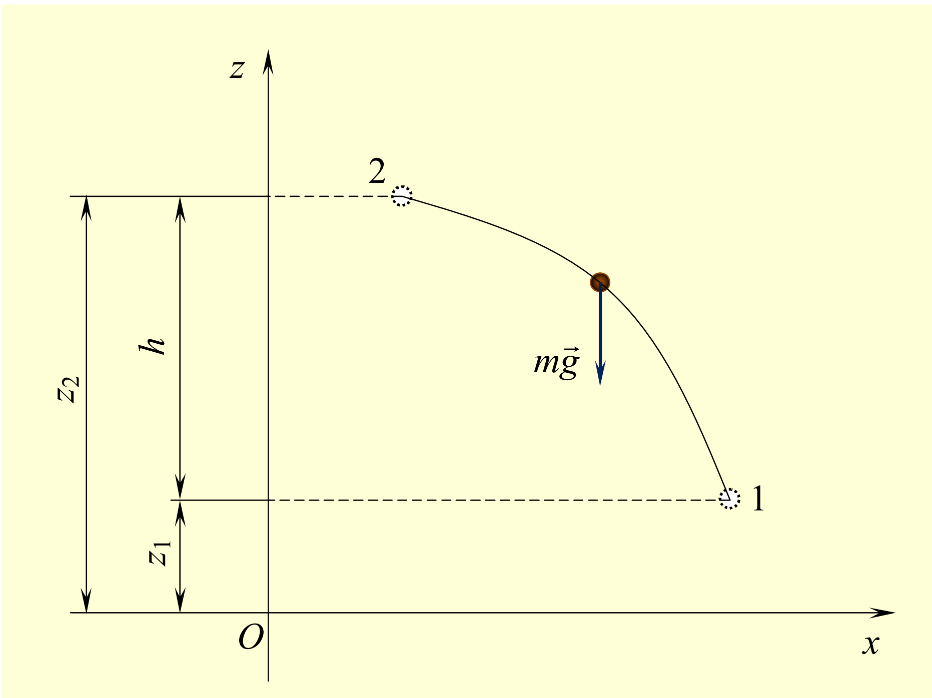

Рис. П9.1. Перемещение тела в однородном поле тяжести

Для определения работы силы тяжести воспользуемся формулой:

$$A = \int_1^2 \left(F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz \right). \qquad (П9.1)$$

В рассматриваемом случае:

$$F_x = 0,\ F_y = 0,\ F_z = -mg. \tag{П9.2}$$

Начальное и конечное положения центра масс тела определяются координатами z_1 и z_2.

Подставим в формулу (П9.1) проекции силы тяжести (П9.2), координаты z_1, z_2 подставим в пределы интегрирования, вынесем постоянные величины за знак интеграла:

$$A = -mg\int_{z_1}^{z_2} dz. \tag{П9.3}$$

После интегрирования получим:

$$A = -mg\left(z_2 - z_1\right) = -mgh. \tag{П9.4}$$

Если $z_2 > z_1$, то $A < 0$. Если $z_2 < z_1$, то $A > 0$.

Окончательно формулу для определения работы силы тяжести можно записать в виде:

$$A = \pm mgh. \tag{П9.5}$$

Сила тяжести совершает положительную работу ($A > 0$), если центр тяжести тела опускается на высоту h относительно своего начального положения. Если центр тяжести тела поднимается на высоту h относительно своего начального положения, то работа силы тяжести отрицательна ($A < 0$).

Работа силы тяжести зависит только от изменения высоты и не зависит от траектории центра тяжести тела. Если после любых, сколь угодно сложных, движений центр тяжести тела возвращается на исходную высоту, то работа силы тяжести на таком перемещении равна нулю.

Работа силы упругости пружины

Рассмотрим пружину жёсткостью k, один конец которой неподвижно закреплён, а второй можно перемещать вдоль оси пружины, прикладывая внешнюю силу (рис. П9.2). Проведём координатную ось Ox вдоль оси пружины, совместив точку O начала координат с положением свободного конца недеформированной пружины.

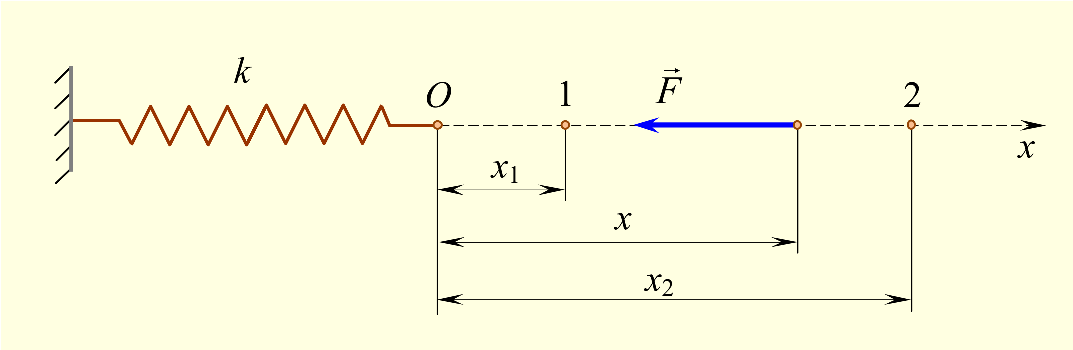

Рис. П9.2. Деформация растяжения пружины

Пусть пружина в начальном положении растянута внешней силой так, что незакреплённый конец пружины находится в положении 1 с координатой x_1. Затем пружину дополнительно растягивают так, что её незакреплённый конец перемещается в положение 2 с координатой x_2. Определим работу силы упругости $\vec{F}$, совершаемую при деформировании пружины.

Воспользуемся формулой (П9.1). Проекция силы упругости на ось Ox в произвольном положении незакрепленного конца пружины с координатой x:

$$F_x = -kx. \tag{П9.6}$$

Сила $\vec{F}$ направлена вдоль оси Ox, так что её проекции на оси Oy и Oz (на рисунке П9.2 эти оси не показаны) равны нулю:

$$F_y = 0, \quad F_z = 0. \tag{П9.7}$$

Подставим (П9.6), (П9.7) в формулу (П9.1), координаты x_1, x_2 подставим в пределы интегрирования, постоянную величину ($-k$) вынесем за знак интеграла:

$$A = -k\int_{x_1}^{x_2} x\,dx. \tag{П9.8}$$

Вычислив интеграл в правой части (П9.8), получим

$$A = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}. \tag{П9.9}$$

Формула (П9.2) является универсальной при условии, что x_1 – координата начального положения, а x_2 – координата конечного положения незакреплённого конца пружины. Эта формула справедлива и когда пружина растягивается, и в том случае, когда пружина сжимается.

Если $|x_1| > |x_2|$, то работа силы упругости положительна ($A > 0$). Если $|x_1| < |x_2|$, то работа силы упругости отрицательна ($A < 0$).

Работа силы на вращательном перемещении твёрдого тела

Рассмотрим твёрдое тело, имеющее ось вращения. Пусть к некоторой точке K тела приложена произвольная внешняя сила $\vec{F}$ (рис. П9.3 *а*). Можно предположить, что при вычислении работы силы $\vec{F}$, совершаемой при вращении тела, будет иметь значение не сама сила, а её момент $M_z(\vec{F})$ относительно оси вращения. Выясним, от чего зависит этот момент.

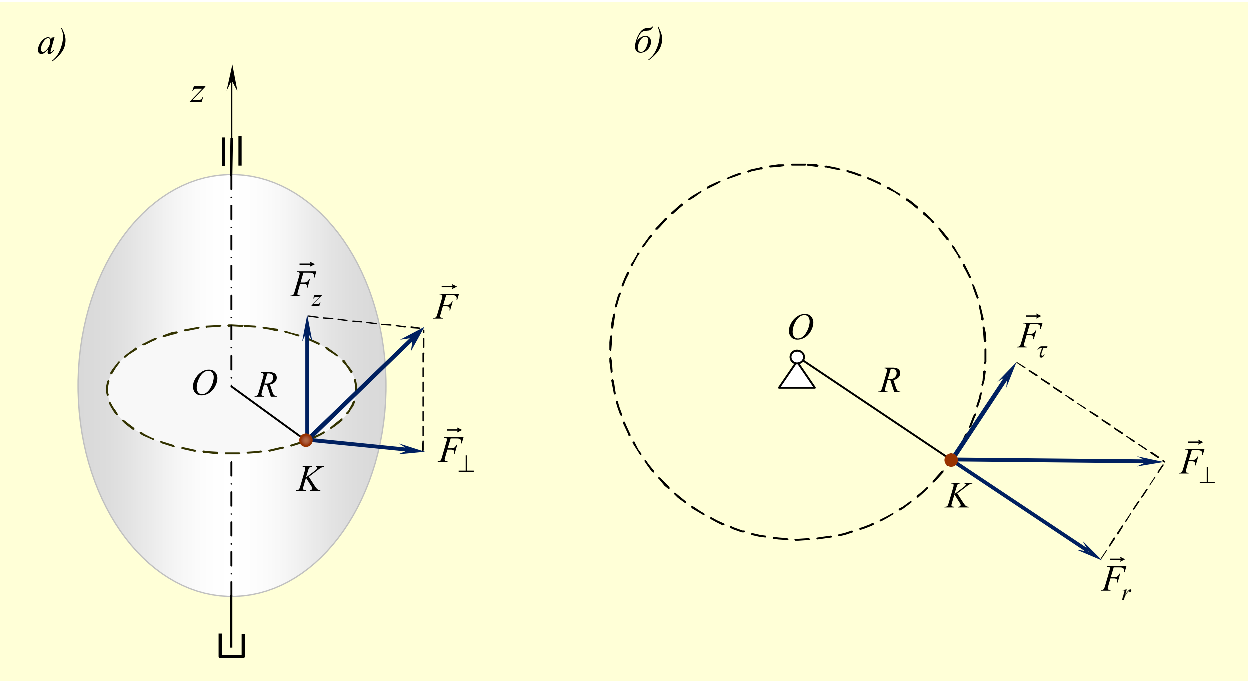

Рис. П9.3. Действие силы на твёрдое тело, имеющее ось вращения

Силу $\vec{F}$ можно разложить на составляющие (см. рис. П9.3 *а*):

$$\vec{F} = \vec{F}_\perp + \vec{F}_z. \qquad \text{(П9.10)}$$

Здесь сила $\vec{F}_z$ параллельна оси вращения, а сила $\vec{F}_\perp$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения. В свою очередь силу $\vec{F}_\perp$ можно разложить на радиальную $\vec{F}_r$ и тангенциальную $\vec{F}_\tau$ составляющие (см. рис. П9.3 *б*). Следовательно, силу $\vec{F}$ можно разложить на три составляющие:

$$\vec{F} = \vec{F}_\tau + \vec{F}_r + \vec{F}_z. \qquad \text{(П9.11)}$$

Момент M_z силы $\vec{F}$ относительно оси вращения равен сумме моментов её составляющих:

$$M_z = M_z(\vec{F}_\tau) + M_z(\vec{F}_r) + M_z(\vec{F}_z)\,. \qquad (\text{П}9.11)$$

Составляющая $\vec{F}_r$ пересекает ось вращения, а составляющая $\vec{F}_z$ параллельна оси вращения. Моменты этих сил относительно оси вращения тела равны нулю:

$$M_z(\vec{F}_r) = 0; \quad M_z(\vec{F}_z) = 0\,. \qquad (\text{П}9.12)$$

Подставив (П9.12) в (П9.11), получим:

$$M_z = M_z(\vec{F}_\tau)\,. \qquad (\text{П}9.13)$$

Момент произвольной силы, приложенной к твёрдому телу, относительно оси вращения тела равен моменту тангенциальной (по отношению к траектории точки приложения силы) составляющей данной силы.

Согласно правилу вычисления момента силы относительно оси (см. параграф 2.7, стр. 70), момент $M_z(\vec{F}_\tau)$ равен моменту силы $\vec{F}_\tau$ относительно точки пересечения оси вращения с перпендикулярной к ней плоскостью (точка O на рисунке П9. 3). Следовательно,

$$M_z = F_\tau R\,. \qquad (\text{П}9.14)$$

Рассмотрим элементарный поворот тела вокруг оси вращения на угол $d\varphi$ (рис. П9.4). При таком повороте направление вектора перемещения $d\vec{r}$ точки K практически совпадает с направлением составляющей $\vec{F}_\tau$. А модуль перемещения $d\vec{r}$ практически равен длине ds дуги KK' траектории точки K.

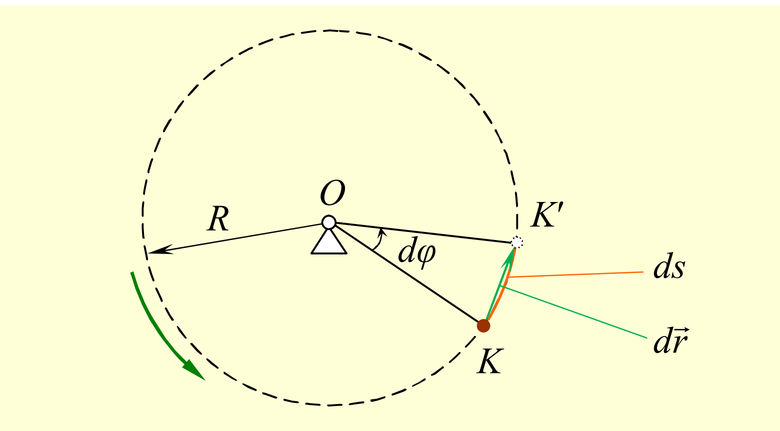

Рис. П9.3. Элементарное угловое перемещение тела

Вычислим элементарную работу силы $\vec{F}$ на перемещении $d\vec{r}$ с учётом разложения (П9.11):

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F}_\tau \cdot d\vec{r} + \vec{F}_r \cdot d\vec{r} + \vec{F}_z \cdot d\vec{r}\,. \qquad \text{(П9.15)}$$

Сила $\vec{F}_\tau$ составляет с перемещением $d\vec{r}$ угол 0°, а силы $\vec{F}_r$ и $\vec{F}_z$ – углы 90°. Поэтому:

$$\vec{F}_\tau \cdot d\vec{r} = F_\tau\, ds \cos 0^\circ = F_\tau\, ds\ ;\ \vec{F}_r \cdot d\vec{r} = F_r\, ds \cos 90^\circ = 0;\ \vec{F}_z \cdot d\vec{r} = F_z\, ds \cos 90^\circ = 0\,.$$

Следовательно, элементарная работа силы $\vec{F}$ на перемещении $d\vec{r}$ равна элементарной работе её тангенциальной составляющей:

$$\delta A = F_\tau\, ds\,. \qquad \text{(П9.16)}$$

Вычислим длину ds дуги KK' (см. рис. П9.3):

$$ds = R\, d\varphi\,. \qquad \text{(П9.17)}$$

Подставим (П9.17) в (П9.16):

$$\delta A = F_\tau\, R\, d\varphi\,. \qquad \text{(П9.18)}$$

Учитывая соотношение (П9.14), получим окончательно

$$\delta A = M_z\, d\varphi\,. \qquad \text{(П9.19)}$$

Работа силы, совершаемая при элементарном повороте твёрдого тела, равна произведению момента данной силы относительно оси вращения тела на элементарный угол поворота.

Работа силы, совершаемая при конечном повороте твёрдого тела, когда угол поворота φ изменяется от φ_1 до φ_2, равна интегральной сумме элементарных работ:

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z\, d\varphi\,. \qquad \text{(П9.20)}$$

Для вычисления интеграла в (П9.20) необходимо знать зависимость момента M_z от угла поворота тела. В частном случае при $M_z = const$:

$$A = M_z(\varphi_2 - \varphi_1)\,. \qquad \text{(П9.21)}$$