

Приложение 8. Частные случаи применения закона сохранения момента импульса

Система материальных точек в поле центральных сил

Рассмотрим систему материальных точек массами m_1, m_2, \dots, m_n , на которую действуют либо силы притяжения к неподвижному внешнему центру (точка O и силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ на рисунке П8.1) либо силы отталкивания от неподвижного внешнего центра.

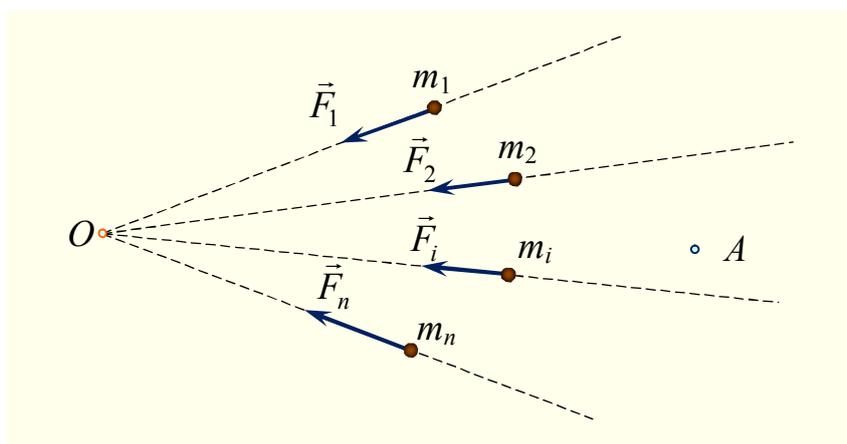


Рис. П8.1. Система материальных точек в поле центральных сил притяжения

При любом положении рассматриваемой системы и при любых изменениях её конфигурации линии действия сил притяжения или отталкивания пересекают неподвижный центр. Такие силы называют **центральными**, а точку, в которой пересекаются линии действия центральных сил, называют **центром сил**.

Силовое поле, в котором на каждую помещённую туда частицу действует центральная сила, зависящая от положения частицы относительно центра сил, называют **полем центральных сил**. Примерами центральных сил являются гравитационные силы и кулоновские силы в тех случаях, когда взаимодействующие тела можно рассматривать как материальные точки.

Поскольку линии действия центральных сил всегда пересекаются в их центре, моменты этих сил относительно центра сил тождественно равны нулю. Если на рассматриваемую механическую систему никакие другие внешние силы, кроме центральных, не действуют, то в любой момент времени выполняется условие:

$$\vec{M}_O^{\text{внешн}} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i) = 0. \quad (\text{П8.1})$$

Сумма моментов внешних центральных сил относительно их центра в любой момент времени равна нулю. Но тогда момент импульса рассматриваемой механической системы относительно центра сил не изменяется:

$$\vec{L}_O = \text{const}. \quad (\text{П8.2})$$

Система, находящаяся в поле центральных сил не является замкнутой, т.к. она взаимодействует с внешним центром притяжения или отталкивания. В случае замкнутой системы сохраняется момент импульса относительно любой, произвольно выбранной, точки пространства. В случае системы, находящейся в поле центральных сил, сохраняется момент импульса только относительно центра сил. Момент импульса системы относительно других точек пространства, вообще говоря, не сохраняется. На рисунке П8.1 показана произвольно выбранная в пространстве точка A . Линии действия сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ не пересекают точку A , и их моменты относительно точки A не равны нулю.

Сохранение момента импульса относительно оси вращения механической системы

Рассмотрим систему материальных точек m_1, m_2, \dots, m_n , которая вращается вокруг вертикальной оси Oz (рис. П8.2). Трение будем считать настолько малым, что его действием за рассматриваемый промежуток времени можно пренебречь.

На систему действуют силы тяжести $m_i \vec{g}$ и реакции опор \vec{R}_O и \vec{R}_A (рис. П8.2), которые являются внешними силами. Другие внешние силы на рассматриваемую систему не действуют. Линии действия реакций \vec{R}_O и \vec{R}_A пересекают ось Oz . Линии действия сил тяжести $m_i \vec{g}$ параллельны оси Oz . Поэтому моменты всех внешних сил относительно оси Oz равны нулю. Но тогда равна нулю и сумма моментов внешних сил относительно данной оси. Следовательно, момент импульса рассматриваемой системы относительно оси вращения Oz не изменяется:

$$L_z = \text{const}. \quad (\text{П8.3})$$

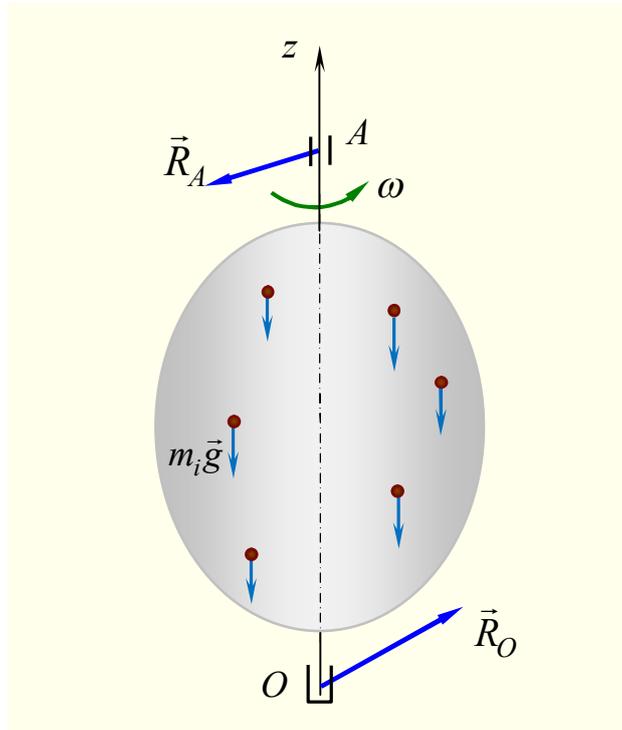


Рис. П8.2. Вращение системы вокруг вертикальной оси

Пусть от начального момента времени $t_0 = 0$ до некоторого момента времени t_1 система вращается с угловой скоростью ω_1 , сохраняя свою конфигурацию, так что момент инерции системы относительно оси Oz остаётся неизменным: $I_{z1} = const$. Пусть в момент времени t_1 взаимное расположение материальных точек системы изменяется. Соответственно, момент инерции системы относительно оси Oz изменяется и становится равным I_{z2} . При дальнейшем вращении момент инерции системы остаётся постоянным: $I_{z2} = const$. Следует ожидать, что при изменении конфигурации системы её угловая скорость вращения также изменяется. Определим изменённую угловую скорость ω_2 с помощью закона сохранения момента импульса относительно оси вращения.

Момент импульса L_z системы неизменной конфигурации (твёрдого тела) относительно оси вращения равен произведению осевого момента инерции системы на угловую скорость вращения. Для рассматриваемой системы получим:

а) при $0 \leq t < t_1$ $L_{z1} = I_{z1} \omega_1$;

б) при $t > t_1$ $L_{z2} = I_{z2} \omega_2$.

Т.к. $L_z = const$, то $L_{z1} = L_{z2}$, следовательно, справедливо равенство:

$$I_{z1} \omega_1 = I_{z2} \omega_2. \quad (\text{П8.4})$$

Отсюда

$$\omega_2 = \frac{I_{z1}}{I_{z2}} \omega_1. \quad (\text{П8.5})$$

Если момент инерции системы увеличивается: $I_{z2} > I_{z1}$, то угловая скорость системы уменьшается: $\omega_2 < \omega_1$. И, наоборот, при уменьшении момента инерции системы, когда $I_{z2} < I_{z1}$, угловая скорость вращения системы увеличивается: $\omega_2 > \omega_1$.