

## Приложение 8. Частные случаи применения закона сохранения момента импульса

### Система материальных точек в поле центральных сил

Рассмотрим систему материальных точек массами  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , на которую действуют либо силы притяжения к неподвижному внешнему центру (точка  $O$  и силы  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  на рисунке П8.1) либо силы отталкивания от неподвижного внешнего центра.

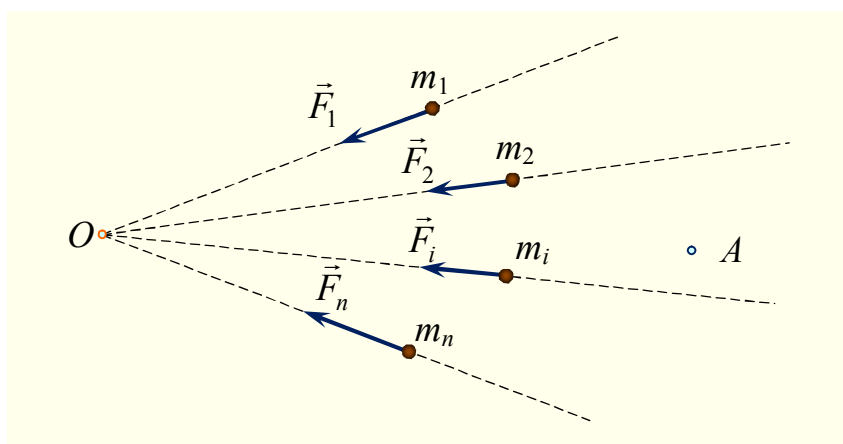


Рис. П8.1. Система материальных точек в поле центральных сил притяжения

При любом положении рассматриваемой системы и при любых изменениях её конфигурации линии действия сил притяжения или отталкивания пересекают неподвижный центр. Такие силы называют **центральными**, а точку, в которой пересекаются линии действия центральных сил, называют **центром сил**.

Силовое поле, в котором на каждую помещённую туда частицу действует центральная сила, зависящая от положения частицы относительно центра сил, называют **полем центральных сил**. Примерами центральных сил являются гравитационные силы и кулоновские силы в тех случаях, когда взаимодействующие тела можно рассматривать как материальные точки.

Поскольку линии действия центральных сил всегда пересекаются в их центре, моменты этих сил относительно центра сил тождественно равны нулю. Если на рассматриваемую механическую систему никакие другие внешние силы, кроме центральных, не действуют, то в любой момент времени выполняется условие:

$$\vec{M}_O^{внешн} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i) = 0. \quad (\text{П8.1})$$

Сумма моментов внешних центральных сил относительно их центра в любой момент времени равна нулю. Но тогда момент импульса рассматриваемой механической системы относительно центра сил не изменяется:

$$\vec{L}_O = const. \quad (\text{П8.2})$$

Система, находящаяся в поле центральных сил не является замкнутой, т.к. она взаимодействует с внешним центром притяжения или отталкивания. В случае замкнутой системы сохраняется момент импульса относительно любой, произвольно выбранной, точки пространства. В случае системы, находящейся в поле центральных сил, сохраняется момент импульса только относительно центра сил. Момент импульса системы относительно других точек пространства, вообще говоря, не сохраняется. На рисунке П8.1 показана произвольно выбранная в пространстве точка  $A$ . Линии действия сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  не пересекают точку  $A$ , и их моменты относительно точки  $A$  не равны нулю.

### **Сохранение момента импульса относительно оси вращения механической системы**

Рассмотрим систему материальных точек  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , которая вращается вокруг вертикальной оси  $Oz$  (рис. П8.2). Трение будем считать настолько малым, что его действием за рассматриваемый промежуток времени можно пренебречь.

На систему действуют силы тяжести  $m_i \vec{g}$  и реакции опор  $\vec{R}_O$  и  $\vec{R}_A$  (рис. П8.2), которые являются внешними силами. Другие внешние силы на рассматриваемую систему не действуют. Линии действия реакций  $\vec{R}_O$  и  $\vec{R}_A$  пересекают ось  $Oz$ . Линии действия сил тяжести  $m_i \vec{g}$  параллельны оси  $Oz$ . Поэтому моменты всех внешних сил относительно оси  $Oz$  равны нулю. Но тогда равна нулю и сумма моментов внешних сил относительно данной оси. Следовательно, момент импульса рассматриваемой системы относительно оси вращения  $Oz$  не изменяется:

$$L_z = const. \quad (\text{П8.3})$$

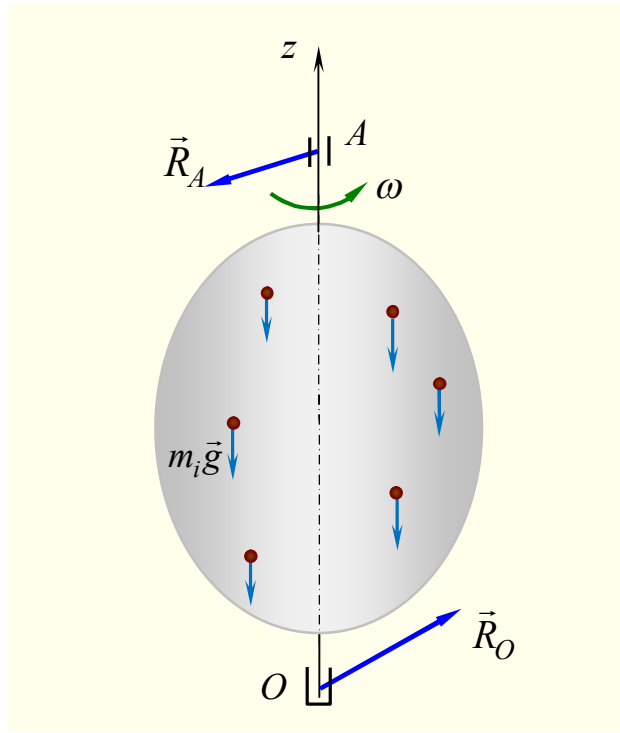


Рис. П8.2. Вращение системы вокруг вертикальной оси

Пусть от начального момента времени  $t_0 = 0$  до некоторого момента времени  $t_1$  система вращается с угловой скоростью  $\omega_1$ , сохраняя свою конфигурацию, так что момент инерции системы относительно оси  $Oz$  остаётся неизменным:  $I_{z1} = const$ . Пусть в момент времени  $t_1$  взаимное расположение материальных точек системы изменяется. Соответственно, момент инерции системы относительно оси  $Oz$  изменяется и становится равным  $I_{z2}$ . При дальнейшем вращении момент инерции системы остаётся постоянным:  $I_{z2} = const$ . Следует ожидать, что при изменении конфигурации системы её угловая скорость вращения также изменяется. Определим изменённую угловую скорость  $\omega_2$  с помощью закона сохранения момента импульса относительно оси вращения.

Момент импульса  $L_z$  системы неизменной конфигурации (твёрдого тела) относительно оси вращения равен произведению осевого момента инерции системы на угловую скорость вращения. Для рассматриваемой системы получим:

а) при  $0 \leq t < t_1$   $L_{z1} = I_{z1} \omega_1$ ;

б) при  $t > t_1$   $L_{z2} = I_{z2} \omega_2$ .

Т.к.  $L_z = const$ , то  $L_{z1} = L_{z2}$ , следовательно, справедливо равенство:

$$I_{z1} \omega_1 = I_{z2} \omega_2. \quad (\text{П8.4})$$

Отсюда

$$\omega_2 = \frac{I_{z1}}{I_{z2}} \omega_1. \quad (\text{П8.5})$$

Если момент инерции системы увеличивается:  $I_{z2} > I_{z1}$ , то угловая скорость системы уменьшается:  $\omega_2 < \omega_1$ . И, наоборот, при уменьшении момента инерции системы, когда  $I_{z2} < I_{z1}$ , угловая скорость вращения системы увеличивается:  $\omega_2 > \omega_1$ .