Приложение 7. Производная по времени момента импульса материальной точки

Докажем справедливость соотношения (2.31) параграфа (2.8). Рассмотрим левую часть этого соотношения:

$$\vec{r} \times m \frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{r} \times \frac{d\vec{V}}{dt}. \tag{П7.1}$$

Продифференцируем по времени векторное произведение $\vec{r} \times \vec{V}$:

$$\frac{d(\vec{r} \times \vec{V})}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{V}}{dt} + \vec{V} \times \vec{V}. \tag{П7.2}$$

Векторное произведение любого вектора самого на себя тождественно равно нулю. Действительно, модуль векторного произведения двух векторов равен произведению модулей перемножаемых векторов, умноженному на синус угла между перемножаемыми векторами. Но любой вектор сам с собой составляет угол, равный нулю. Соответственно, синус этого угла равен нулю. В том числе, в любой момент времени равен нулю модуль векторного произведения скорости на скорость:

$$\left|\vec{V} \times \vec{V}\right| = V^2 \sin 0^\circ = 0.$$

А, следовательно, в любой момент времени равно нулю векторное произведение скорости на скорость:

$$\vec{V} \times \vec{V} = 0. \tag{П7.3}$$

Учитывая (П7.3), преобразуем соотношение (П7.2) к виду:

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{V})}{dt}. \tag{П7.4}$$

Подставим (П7.4) в (П7.1). Внеся скалярную величину *m*, под скобки, получим:

$$\vec{r}\times m\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{d(\vec{r}\times m\vec{V})}{dt}. \qquad (П7.5)$$

Т.к. $m\vec{V}=\vec{p}$, то

$$\vec{r}\times m\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{d(\vec{r}\times\vec{p})}{dt}. \qquad (П7.6)$$

Что и требовалось доказать.