Приложение 4. Прямой метод решения задач динамики механической системы

Прямой метод решения задач динамики механической системы основан на выделении из исследуемой системы отдельных тел, которые в данной задаче можно рассматривать как материальные точки. Взаимодействие между выделенным телом (материальной точкой) и другими телами системы, а также между выделенным телом и телами, не входящими в состав системы, описывается как действие на выделенное тело соответствующих сил (внутренних и внешних). При такой постановке задачи к каждому выделенному из системы телу можно применять методы динамики материальной точки.

Пусть механическая система, представляющая собой совокупность n взаимодействующих материальных точек, движется относительно некоторой инерциальной системы отсчёта. Рассмотрим каждую отдельную материальную точку системы как свободную, приложив к ней соответствующие внешние и внутренние силы. Составив для каждой материальной точки системы основное уравнение динамики, получим систему n векторных уравнений:

$$\begin{cases} m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i^{\,внешн} + \vec{F}_i^{\,внутр}; \\ i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \qquad (П4.1)$$

Выберем в данной системе отсчёта фиксированную точку O и проведём через неё систему координат $Oxyz$. Спроектировав уравнения (П4.1) на выбранные оси координат, получим систему $3n$ скалярных уравнений:

$$\begin{cases} m_i\ddot{x}_i = F_{ix}^{внешн} + F_{ix}^{внутр}; \\ m_i\ddot{y}_i = F_{iy}^{внешн} + F_{iy}^{внутр}; \\ m_i\ddot{z}_i = F_{iz}^{внешн} + F_{iz}^{внутр}; \\ i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \qquad (П4.2)$$

Правые части уравнений (П4.2) могут зависеть от времени, координат точек системы и проекций скоростей точек системы на оси координат. Учитывая эти зависимости, получим систему $3n$ дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} m_i\ddot{x}_i = \Phi_{ix}(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n); \\ m_i\ddot{y}_i = \Phi_{iy}(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n); \\ m_i\ddot{z}_i = \Phi_{iz}(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n); \\ i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \tag{П4.3}$$

Система дифференциальных уравнений (П4.3) имеет порядок $6n$. Её решение зависит от $6n$ произвольных постоянных, для определения которых требуется $6n$ начальных условий.

Пример постановки задачи динамики системы двух тел

Тело 1 массой m_1 и тело 2 массой m_2, соединённые между собой пружиной жесткости k, находятся на гладкой горизонтальной плоскости, наклоненной под углом α к горизонту. До начала движения тело 1 было закреплено на плоскости, а тело 2 удерживалось на плоскости в равновесии с помощью пружины. В начальный момент времени тело массой m_1 отпустили и одновременно сообщили ему начальную скорость V_0 , направленную вниз. Необходимо разработать математическую модель дальнейшего движения тел по плоскости.

Поскольку тела движутся поступательно, каждое из них можно рассматривать как материальную точку, масса которой сосредоточена в центре масс тела и к которой приложены действующие на тело внешние силы. Для задания движения тел проведём ось Ox вдоль плоскости вниз, как показано на рисунке П4.1. Ось Oy проведём через центр масс тела 1 в положении равновесия. В этом случае начальная координата тела 1 равна нулю: $x_{10} = 0$. Покажем на кинематической схеме задачи (рис. П4.1) начальную скорость $\vec{V}_0$ и координаты x_1 , x_2 тел в произвольный момент времени.

Для определения начальной координаты x_{20} тела 2 необходимо рассмотреть равновесие данного тела до начала движения (рис. П4.2). Искомая начальная координата складывается из расстояния l_0 между центрами масс тел при недеформированной пружине и деформации Δ_0 растяжения пружины при равновесии:

$$x_{20} = l_0 + \Delta_0. \tag{П4.1}$$

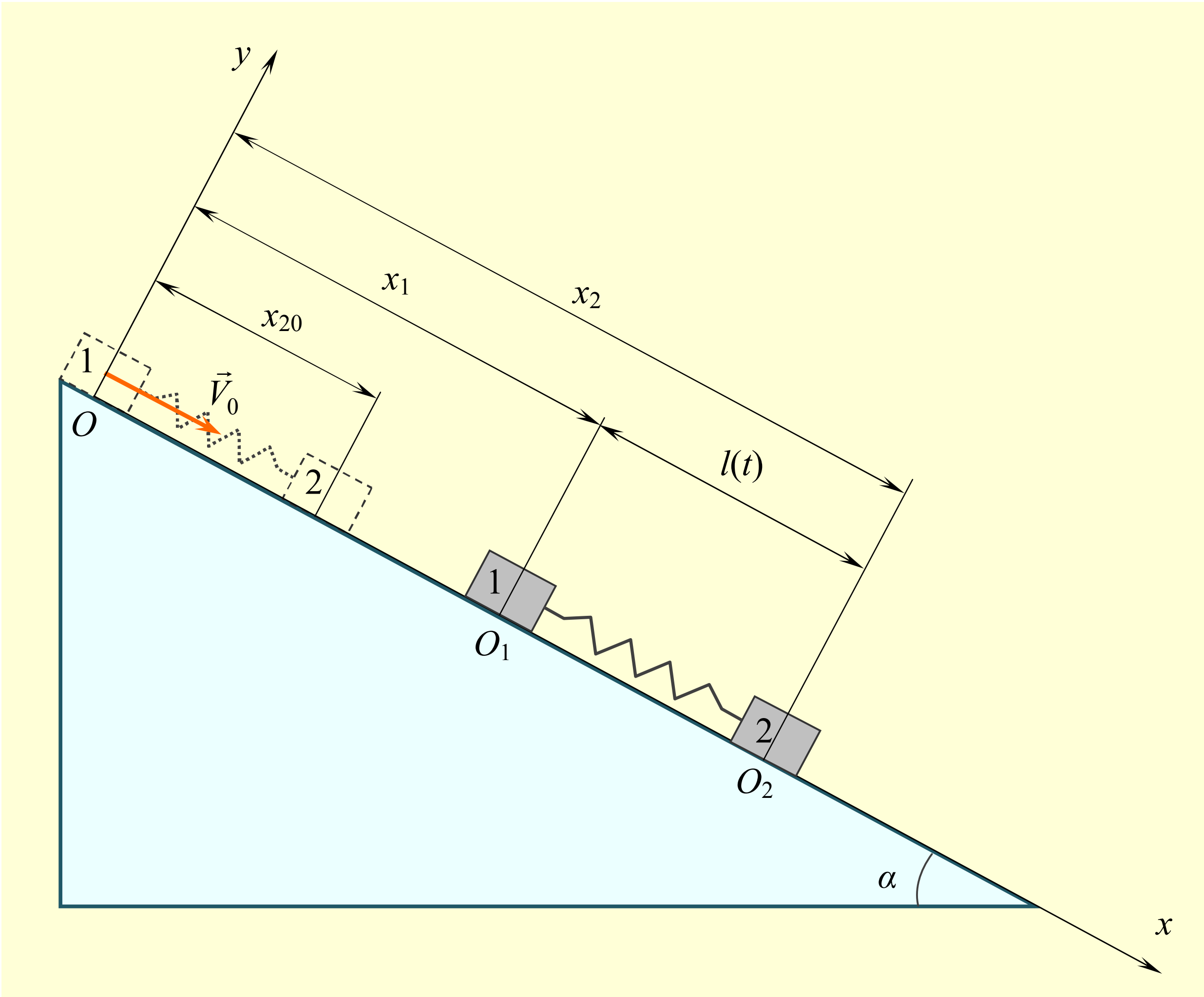

Рис. П4.1. Кинематическая схема движения системы тел

Расстояние l_0 можно измерить, положив систему тел на гладкую горизонтальную плоскость. Величину Δ_0 найдём из уравнения равновесия сил, действующих на тело 2 до начала движения.

При равновесии на тело 2 действуют: сила тяжести $m_2 \vec{g}$, сила упругости $\vec{F}_0$ и реакция $\vec{N}_2$ плоскости (рис. П4.2). Составим уравнение равновесия данной системы сил (сумма проекций сил на ось Ox равна нулю):

$$m_2 g \cos\beta + F_{0x} = 0. \qquad (\text{П}4.2)$$

Проекция силы упругости $\vec{F}_0$ на ось Ox:

$$F_{0x} = -k\Delta_0. \qquad (\text{П}4.3)$$

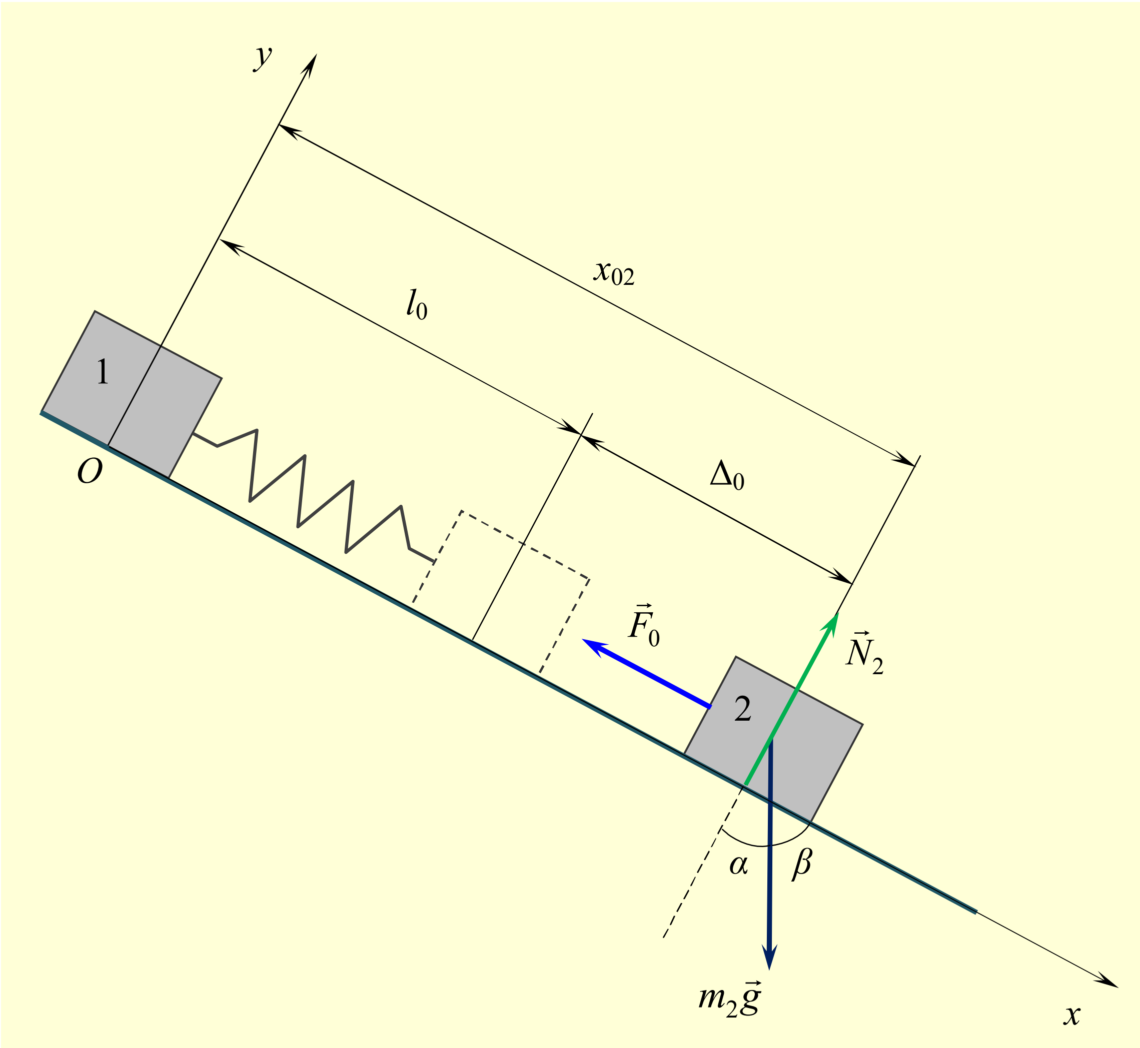

Рис. П4.2. Схема равновесия тела 2

Подставим (П4.3) в (П4.2), а также учтём, что $\beta = 90^\circ - \alpha$ и, соответственно, $\cos\beta = \sin\alpha$:

$$m_2 g \sin\beta - k\Delta_0 = 0. \qquad (П4.4)$$

Из уравнения (П4.4) найдём деформацию пружины при равновесии тела 2:

$$\Delta_0 = \frac{m_2 g \sin\beta}{k}. \qquad (П4.5)$$

Подставив (П4.5) в (П4.2), получим формулу для расчёта начальной координаты тела 2:

$$x_{20} = l_0 + \frac{m_2 g \sin\beta}{k}. \qquad (П4.6)$$

Для составления динамической схемы задачи изобразим тела в произвольный момент времени t и покажем действующие на тела силы (рис. П4.3). При изображении сил упругости будем считать, что пружина в данный момент времени растянута, что не нарушает общности, т.к. рассматривается произвольный момент времени.

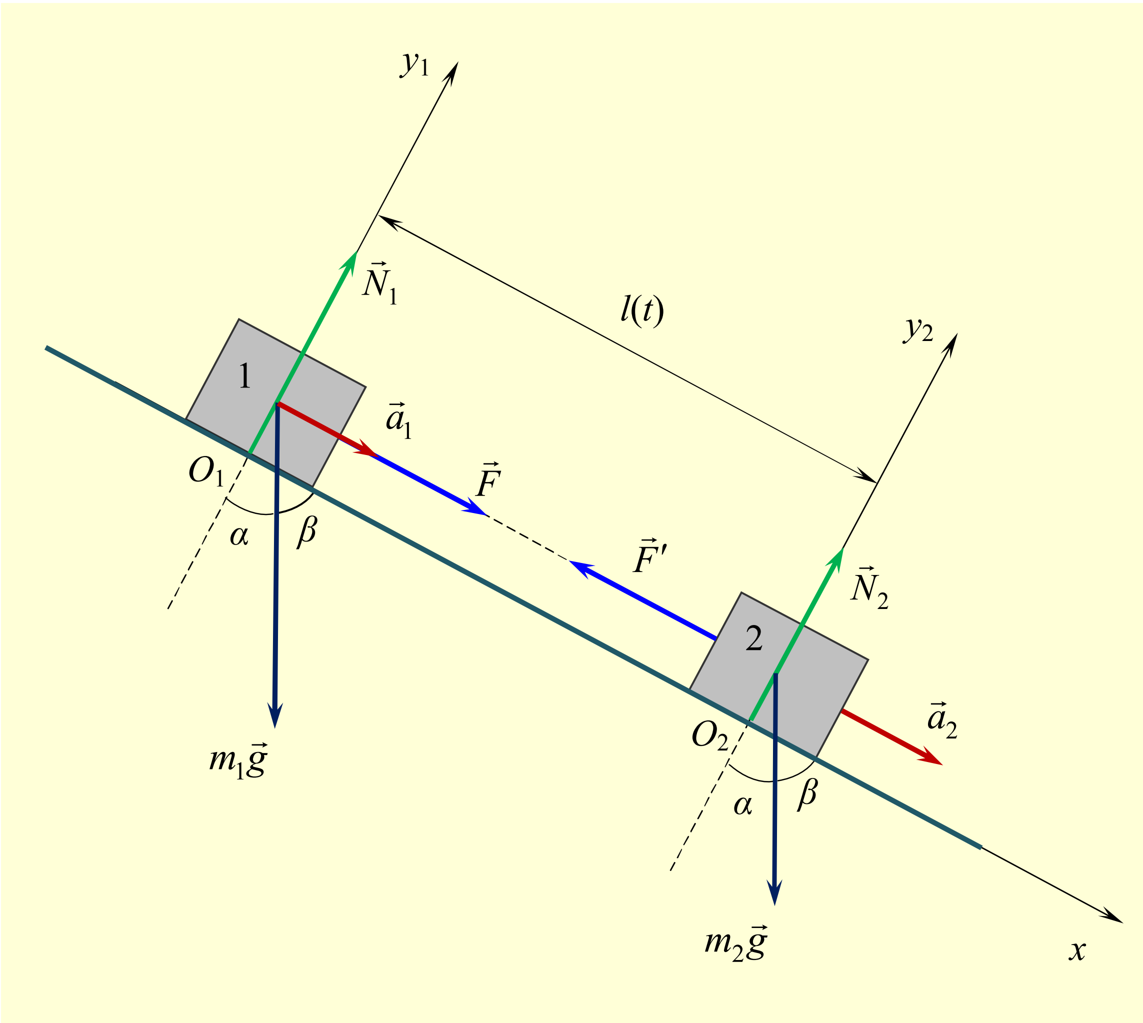

Рис. П4.3. Динамическая схема задачи

На тело 1 действуют: сила тяжести $m_1\vec{g}$, сила упругости $\vec{F}$, реакция $\vec{N}_1$ плоскости. На тело 2 действуют: сила тяжести $m_2\vec{g}$, сила упругости $\vec{F}'$, реакция $\vec{N}_2$ плоскости. Согласно третьему закону Ньютона: $\vec{F} = -\vec{F}'$.

Составим для тел 1 и 2 уравнения основного закона динамики материальной точки:

$$m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{F} + \vec{N}_1;$$
$$m_2\vec{a}_2 = m_2\vec{g} + \vec{F}' + \vec{N}_2. \qquad (П4.7)$$

Спроектируем уравнения (П4.7) на координатную ось Ox:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= m_1 g\sin\alpha + F_x; \\ m_2\ddot{x}_2 &= m_2 g\sin\alpha + F'_x. \end{aligned} \tag{П4.8}$$

Проекции сил упругости пропорциональны динамической деформации Δ пружины. Условимся считать положительной деформацию растяжения пружины. Тогда:

$$F_x = k\Delta;\ F'_x = -k\Delta. \tag{П4.9}$$

Деформация пружины равна разности текущего расстояния $l(t)$ между центрами масс тел и расстояния l_0 между центрами масс при недеформированной пружине:

$$\Delta = l(t) - l_0. \tag{П4.10}$$

В свою очередь, текущее расстояние между центрами масс равно разности координат тел в момент времени t (см. рис. П4.1):

$$l(t) = x_2(t) - x_1(t). \tag{П4.11}$$

Подставим (П4.11) в (П4.10):

$$\Delta = x_2 - x_1 - l_0. \tag{П4.12}$$

Используя (П4.9), (П4.12), найдём выражения проекций сил упругости:

$$F_x = k(x_2 - x_1 - l_0);\ F'_x = -k(x_2 - x_1 - l_0). \tag{П4.13}$$

Подставив (П4.13) в (П4.8), после преобразований получим дифференциальные уравнения движения рассматриваемой системы тел:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 - \omega_1^2 x_2 &= g\sin\alpha - \omega_1^2 l_0; \\ \ddot{x}_2 - \omega_2^2 x_1 + \omega_2^2 x_2 &= g\sin\alpha + \omega_2^2 l_0, \end{aligned} \tag{П4.14}$$

где введены обозначения: $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{k}{m_1}}$, $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{k}{m_2}}$.

Составим начальные условия задачи:

$$t=0: \quad x_1=0; \;\; x_2=x_{20};$$
$$\dot{x}_1=V_0; \; \dot{x}_2=0. \tag{П4.15}$$

Спроектируем уравнения (П4.7) на координатную ось Oy. Для удобства проектирования проведём вспомогательные координатные оси O_1y_1 и O_2y_2 (см. рис. П4.3), параллельные оси Oy. Учитывая, что проекции ускорений тел ось Oy равны нулю, получим уравнения:

$$N_1-m_1g\cos\alpha=0;$$
$$N_2-m_2g\cos\alpha=0. \tag{П4.16}$$

Математически задача о движении рассматриваемой системы тел описывается дифференциальными уравнениями (П4.14), которые необходимо проинтегрировать при начальных условиях (П4.15), и алгебраическими уравнениями (П4.16), которые определяют реакции плоскости.

Примечание. *Использованный в примере выбор кинематического описания движения тел не является оптимальным. Дифференциальные уравнения движения тел получаются более простыми, если движение тела 2 рассматривать в системе отсчёта, связанной с телом 1. Однако, данная система отсчёта – неинерциальная, и для её использования надо знать, как ставятся задачи динамики в неинерциальных системах отсчёта. Этот материал требует отдельного рассмотрения. Поэтому приведённый пример следует рассматривать скорее как иллюстрацию прямого метода, а не как пример его наилучшего применения на практике.*