Приложение 3. Определение положения центра масс механической системы

Пусть тело находится в покое в однородном поле тяжести (рис. П3.1). Из опыта известно, что если приложить в центре масс такого тела силу, равную по модулю силе тяжести тела, но направленную вертикально вверх, и одновременно убрать все удерживающие тело связи, то тело будет находиться в равновесии, независимо от ориентации тела в пространстве. Геометрическую точку, совпадающую с центром масс тела в однородном поле тяжести, называют **центром тяжести** тела.

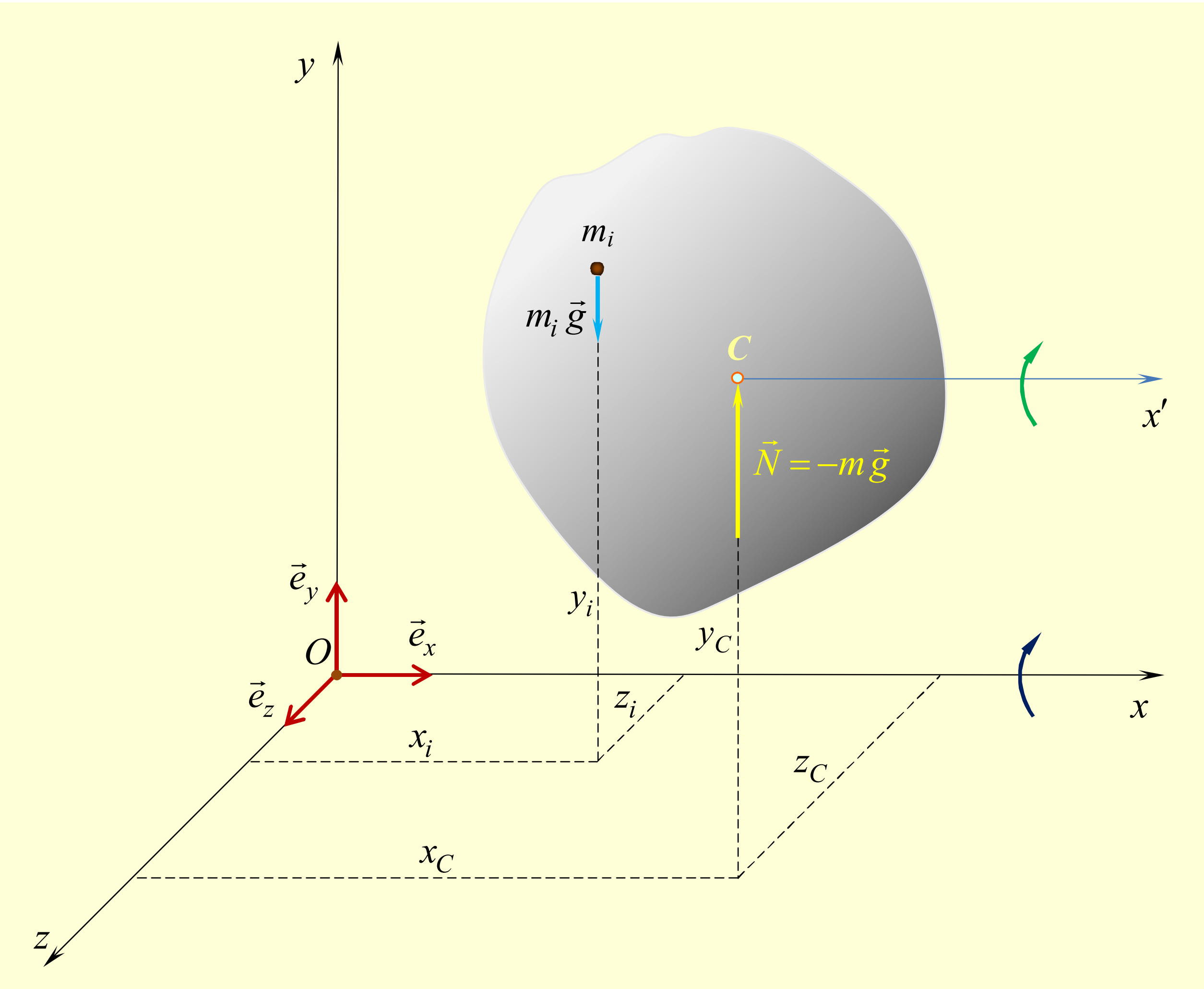

Рис. П3.1. Тело в однородном поле тяжести

Приложим к центру масс некоторого тела (см. рис. П3.1) силу $\vec{N} = -m\vec{g}$, где m – масса тела. В однородном поле тяжести на частицы, из которых состоит тело, действуют силы тяжести $m_i\vec{g}$, где m_i – масса i-ой частицы тела. Сила $\vec{N}$ уравновешивает силы тяжести $m_i\vec{g}$. Следовательно, система сил $m_i\vec{g}, \vec{N}$ удовлетворяет всем уравнениям равновесия статики.

Проведём через произвольную точку O поля сил тяжести систему координат $Oxyz$ (см. рис. П3.1). Направим ось Oy вертикально вверх, а оси Ox и Oz – горизонтально. Составим для системы сил $m_i\vec{g}$, $\vec{N}$ уравнение моментов относительно оси Oz:

$$Nx_C - \sum_{i=1}^{n} m_i g\, x_i = 0. \qquad \text{(П3.1)}$$

Учитывая, что $N = mg$, получим из (П3.1) формулу для координаты x центра масс тела:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\, x_i}{m}. \qquad \text{(П3.2)}$$

Составив аналогично уравнение моментов относительно оси Ox, получим формулу для координаты z центра масс тела:

$$z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\, z_i}{m}. \qquad \text{(П3.3)}$$

Повернём тело на 90° вокруг центральной оси Ox', как показано на рисунке П3.1. Если при этом силу $\overleftarrow{N}$ направить по-прежнему вертикально вверх, то система сил $m_i\vec{g}$, $\vec{N}$ останется в равновесии. Повернём также систему координат вокруг оси Ox, так чтобы ось Oz была направлена вертикально, а ось Oy – горизонтально. При указанных преобразованиях ориентация тела относительно системы координат $Oxyz$ не изменится.

Составив уравнение моментов относительно оси Ox повёрнутой системы координат, получим формулу для координаты y центра масс:

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\, y_i}{m}. \qquad \text{(П3.4)}$$

Радиус-вектор $\vec{r}_C$ центра масс тела можно представить в виде разложения по ортам $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ системы координат:

$$\vec{r}_C = x_C\vec{e}_x + y_C\vec{e}_y + z_C\vec{e}_z\,. \tag{П3.5}$$

Подставим выражения координат центра масс (П3.2), (П3.3), (П3.4) в соотношение (П3.5) и вынесем за скобки общие множители:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\,(x_i\vec{e}_x + y_i\vec{e}_y + z_i\vec{e}_z)}{m}\,. \tag{П3.6}$$

Выражение в скобках под знаком суммирования в (П3.6) представляет собой радиус-вектор $\vec{r}_i$ соответствующей частицы тела. Следовательно, радиус-вектор центра масс тела определяется соотношением:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{r}_i}{m}\,. \tag{П3.7}$$