Приложение 2. Постановка задач динамики материальной точки

Все задачи динамики материальной точки подразделяют на два класса:

– **прямая задача динамики** – определение действующих на материальную точку сил при заданных кинематических уравнениях движения точки;
– **обратная задача динамики** – определение характеристик движения материальной точки при заданных силах и начальных условиях.

Составление основного уравнения динамики точки

1. Выделить тело, которое необходимо рассматривать для решения данной задачи.

2. Убедиться в том, что выделенное тело в условиях данной задачи можно рассматривать как материальную точку. При этом следует помнить, что простейшая физическая модель тела – материальная точка применяется в тех в задачах, в которых исследуется движение только центра масс тела, а повороты тела и его деформации не рассматриваются.

3. Выяснить с какими другими телами взаимодействует выделенное тело (материальная точка). Составить схему взаимодействия (чертёж задачи). Приложить к рассматриваемой материальной точке силы, описывающие её взаимодействие с другими телами.

4. Составить для рассматриваемой материальной точки основное уравнение динамики в векторной форме, подставив в правую часть этого уравнения сумму всех действующих на данную материальную точку сил:

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \,. \qquad (\text{П}2.1)$$

Силы, действующие на материальную точку, могут зависеть от времени, от положения точки в пространстве и от скорости точки. Постоянные силы можно рассматривать как частный случай сил, зависящих от времени.

В общем случае, правая часть уравнения (П2.1) является функцией времени t, радиус-вектора $\vec{r}$ и скорости $\vec{V}$ материальной точки:

$$m\vec{a} = \vec{\Phi}(t, \vec{r}, \vec{V}) \,. \qquad (\text{П}2.2)$$

5. Выбрать инерциальную систему отсчёта и связать с ней систему координат.

Выбор системы координат, вообще говоря, произволен. Обычно при выборе системы координат руководствуются соображениями простоты проектирования на координатные оси ускорения материальной точки и действующих на неё сил. Кроме того, если точка движется по плоскости, то следует ограничиться двумя расположенными в данной плоскости осями координат. А если точка движется по прямой линии, то для описания её движения достаточно одной координатной оси, проведённой вдоль траектории движения точки.

6. Спроектировать на выбранные оси координат векторное уравнение (П2.1).

В общем случае пространственного движения материальной точки получается система трёх уравнений:

$$m\ddot{x} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix};$$
$$m\ddot{y} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}; \qquad \text{(П2.3)}$$
$$m\ddot{z} = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}.$$

Правые части уравнений (П2.3) могут зависеть от времени t, координат x, y, z материальной точки и проекций $V_x = \dot{x}$, $V_y = \dot{y}$, $V_z = \dot{z}$ её скорости на оси координат. Соответственно, математическая модель динамики материальной точки, в общем случае, представляет собой систему трёх дифференциальных уравнений шестого порядка:

$$m\ddot{x} = \Phi_1(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z});$$
$$m\ddot{y} = \Phi_2(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); \qquad \text{(П2.4)}$$
$$m\ddot{z} = \Phi_3(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}).$$

Уравнения (П2.4) называют **дифференциальными уравнениями движения** материальной точки.

Решение прямой задачи динамики материальной точки

Уравнения (П2.3) позволяют определить одну из действующих на данную материальную точку сил.

Пусть известны кинематические уравнения движения материальной точки:

$$x = f_1(t),\ y = f_2(t),\ x = f_3(t)\ . \qquad (П2.5)$$

Требуется определить действующую на материальную точку силу $\vec{F}_n$, если остальные силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_{n-1}$ известны.

Уравнения (П2.3) в данном случае можно записать в виде:

$$m\ddot{x} = \sum_{i=1}^{n-1} F_{ix} + F_{nx}; \quad m\ddot{y} = \sum_{i=1}^{n-1} F_{iy} + F_{ny}; \quad m\ddot{z} = \sum_{i=1}^{n-1} F_{iz} + F_{nz}. \qquad (П2.6)$$

Из уравнений (П2.6) нетрудно найти проекции искомой силы на оси координат:

$$F_{nx} = m\ddot{x} - \sum_{i=1}^{n-1} F_{ix}\ ; \quad F_{ny} = m\ddot{y} - \sum_{i=1}^{n-1} F_{iy}\ ; \quad F_{nz} = m\ddot{z} - \sum_{i=1}^{n-1} F_{iz}\ . \qquad (П2.7)$$

Проекции F_{nx}, F_{ny}, F_{nz} полностью определяют вектор искомой силы $\vec{F}_n$.

Пример решения прямой задачи динамики материальной точки

Тело массой $m = 2{,}5$ кг движется в плоскости xOy по закону $x = A\cos\omega t$; $y = B\sin\omega t$, где $A = 0{,}20$ м; $B = 0{,}15$ м; $\omega = \pi/6$ рад/с. Определить силу, действующую на тело в момент времени $t_1 = 1{,}5$ с.

Дано:

$m = 2{,}5$ кг;

$x = A\cos\omega t$;

$y = B\sin\omega t$;

$A = 0{,}20$ м; $B = 0{,}15$ м;

$\omega = \pi/6$ рад/с;

$t_1 = 1{,}5$ с.

$\vec{F} = ?$

Р Е Ш Е Н И Е

На тело действует одна сила $\vec{F}$. Основное уравнение динамики для рассматриваемого тела имеет вид:

$$m\vec{a} = \vec{F}\ . \qquad (П2.8)$$

Проекции искомой силы на оси координат:

$$F_x = m\ddot{x}\ ; \quad F_y = m\ddot{y}\ . \qquad (П2.9)$$

Находим производные координат по времени:

$$\dot{x} = -A\omega \sin \omega t; \quad \dot{y} = B\omega \cos \omega t;$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2 \cos \omega t; \quad \ddot{y} = -B\omega^2 \sin \omega t. \tag{П2.10}$$

Подставляем (П2.10) в (П2.9):

$$F_x = -mA\omega^2 \cos \omega t; \;\; F_y = -mB\omega^2 \sin \omega t. \tag{П2.11}$$

Выполняем расчет для момента времени t_1:

$$\omega t_1 = \frac{\pi}{6} \cdot 1,5 = \frac{\pi}{4} \text{ рад}; \cos \omega t_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \sin \omega t_1 = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$F_x = -2,5 \cdot 0,2 \cdot \left(\frac{3,14}{6} \right)^2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,0968 \text{ Н};$$

$$F_y = -2,5 \cdot 0,15 \cdot \left(\frac{3,14}{6} \right)^2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,0726 \text{ Н}.$$

Модуль силы $\vec{F}$ в момент времени t_1:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{0,0968^2 + 0,0726^2} = 0,121 \text{ Н}.$$

Направляющие косинусы:

$$\cos \alpha_x = \frac{F_x}{F} = \frac{0,0968}{0,121} = 0,8000; \;\; \cos \alpha_y = \frac{F_y}{F} = \frac{0,0726}{0,121} = 0,6000.$$

Углы, которые сила $\vec{F}$ составляет с осями координат в момент времени t_1:

$$\alpha_x = 36,87^\circ \approx 37^\circ \;; \;\; \alpha_y = 53,13^\circ \approx 53^\circ.$$

<u>Ответ</u>. В момент времени t_1 = 1,5 с действующая на тело сила $\vec{F}$ равна по модулю 0,121 Н и составляет с осью *Ох* угол $\alpha_x = 37^\circ$, а с осью *Oy* – угол $\alpha_y = 53^\circ$.

Решение обратной задачи динамики материальной точки

В наиболее полной постановке цель решения обратной задачи динамики заключается в определении кинематических уравнений движения материальной точки (П2.5), если известны действующие на материальную точку силы и имеется информация о кинематическом состоянии материальной точки в начальный момент времени. Решение данной задачи сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений (П2.4) при заданных начальных условиях.

Начальные условия представляют собой значения координат и проекций скорости материальной точки в начальный момент времени:

$$t=0: \quad x=x_0;\, y=y_0;\, z=z_0; \qquad \dot{x}=V_{0x};\, \dot{y}=V_{0y};\, \dot{z}=V_{0z}\,. \tag{П2.12}$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений шестого порядка содержит шесть произвольных постоянных (постоянных интегрирования) C_i:

$$\begin{aligned} x &= f_1(t, C_1, C_2, \ldots, C_6); \\ y &= f_2(t, C_1, C_2, \ldots, C_6); \\ x &= f_3(t, C_1, C_2, \ldots, C_6)\,. \end{aligned} \tag{П2.13}$$

Для определения произвольных постоянных необходимо предварительно вычислить производные функций (П2.13) по времени:

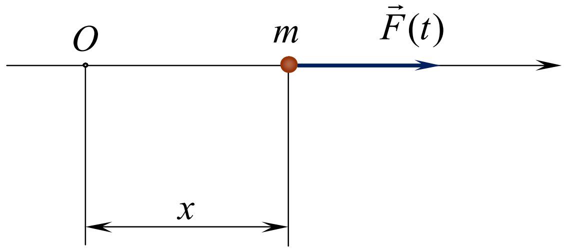
$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_4(t, C_1, C_2, \ldots, C_6); \\ \dot{y} &= f_5(t, C_1, C_2, \ldots, C_6); \\ \dot{x} &= f_6(t, C_1, C_2, \ldots, C_6)\,. \end{aligned} \tag{П2.14}$$

Подстановка начальных условий (П2.14) в соотношения (П2.13) и (П2.11), даёт шесть алгебраических уравнений для определения шести произвольных постоянных.

Конкретный вид кинематических уравнений движения материальной точки зависит не только от действующих на данную материальную точку сил, но и от её кинематического состояния в начальный момент времени (от начальных условий).

Пример решения обратной задачи динамики материальной точки

Тело массой m = 10 кг движется прямолинейно вдоль оси Ox под действием силы $\vec{F}(t)$, проекция которой на ось Ox изменяется по закону $F_x(t) = A - Be^{\alpha t}$, где A = 30 Н; B = 0,5 Н; α = 1,0 с$^{-1}$.В начальный момент времени $t_0 = 0$ тело находилось в точке с координатой x_0 = –2 м и имело начальную скорость величиной $V_0 = 0{,}5$ м/с, направленную противоположно оси Ox. Определить кинематическое уравнение движение тела.

Дано:	РЕШЕНИЕ
m = 10кг; $F_x(t) = A - Be^{\alpha t}$; A = 30 Н; B = 0,5 Н;α = 1,0 с$^{-1}$; x_0 = –2 м; $V_{0x} = -0{,}5$ м/с. — $x(t) = ?$	 Рис. П2.1. Схема задачи

Основное уравнение динамики для рассматриваемого тела:

$$m\vec{a} = \vec{F}(t). \tag{П2.15}$$

Проектируя уравнение (П2.15) на ось Ox, получаем дифференциальное уравнение движения тела:

$$m\ddot{x} = A - Be^{\alpha t}. \tag{П2.16}$$

Записываем начальные условия данной задачи:

$$t = 0; \quad x = x_0; \qquad V_x = V_{0x}. \tag{П2.17}$$

Математическая задача заключается в интегрировании дифференциального уравнения (П2.16) при начальных условиях (П2.17).

Воспользуемся методом разделения переменных. Сделав в (П2.16) замену $\ddot{x} = \dfrac{dV_x}{dt}$, получаем

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{A}{m} - \frac{B}{m} e^{\alpha t} . \qquad (П2.18)$$

Умножаем левую и правую части уравнения (2.18) на dt:

$$dV_x = \frac{A}{m} dt - \frac{B}{m} e^{\alpha t} dt \qquad (П2.19)$$

Интегрируем уравнение (П2.19):

$$\int dV_x = \frac{A}{m} \int dt - \frac{B}{m} \int e^{\alpha t} dt ;$$

$$V_x = \frac{A}{m} t - \frac{B}{\alpha m} e^{\alpha t} + C_1 . \qquad (П2.20)$$

Здесь C_1 – первая постоянная интегрирования (произвольная постоянная).

Соотношение (П2.20) представляет собой первый интеграл дифференциального уравнения (П2.16). Для нахождения второго интеграла делаем в (П2.20) замену переменных $V_x = \dfrac{dx}{dt}$:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{A}{m} t - \frac{B}{\alpha m} e^{\alpha t} + C_1 . \qquad (П2.21)$$

Умножаем уравнение (П2.21) на dt:

$$dx = \frac{A}{m} t dt - \frac{B}{\alpha \cdot m} e^{\alpha t} dt + C_1 dt . \qquad (П2.22)$$

Интегрируем уравнение (П2.22):

$$\int dx = \frac{A}{m} \int t dt - \frac{B}{\alpha m} \int e^{\alpha t} dt + C_1 \int dt .$$

Получаем второй интеграл дифференциального уравнения (П2.16):

$$x = \frac{A}{2m}t^2 - \frac{B}{\alpha^2 m}e^{\alpha t} + C_1 t + C_2. \qquad (П2.23)$$

Здесь C_2 – вторая произвольная постоянная.

Подставив начальные условия (П2.17) в уравнения (П2.20) и (П2.23), получаем систему алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных:

$$\begin{aligned} V_{0x} &= -\frac{B}{\alpha m} + C_1; \\ x_0 &= -\frac{B}{\alpha^2 m} + C_2. \end{aligned} \qquad (П2.24)$$

В данном случае уравнения (П2.24) являются независимыми. Находим решения уравнений (П2.24):

$$C_1 = V_{0x} + \frac{B}{\alpha m}; \;\; C_2 = x_0 + \frac{B}{\alpha^2 m}. \qquad (П2.25)$$

Выполняем расчёт произвольных постоянных:

$$C_1 = -0,5 + \frac{0,5}{1,0 \cdot 10} = -0,45 \text{ м/с};$$

$$C_2 = -2,0 + \frac{0,5}{1,0^2 \cdot 10} = -1,95 \text{ м}.$$

Используя найденные значения произвольных постоянных, записываем интегралы дифференциального уравнения (П2.16):

$$V_x = 3\,t - 0,05\,e^t - 0,45\,(\text{м/с});$$

$$x = 1,5t^2 - 0,05 \cdot e^t - 0,45t - 1,95\,(\text{м}).$$

Ответ. Кинематическое уравнение движение тела имеет вид:

$$x(t) = 1,5t^2 - 0,05e^t - 0,45t - 1,95\,(\text{м}).$$