Приложение 12. Примеры вычисления потенциальной энергии

Потенциальная энергия тела в однородном поле тяжести

Пусть тело массой m находится в однородном поле тяжести. Примем некоторую горизонтальную плоскость за нулевой уровень, от которого будем отсчитывать высоту центра тяжести тела. Потенциальную энергию определяют с точностью до постоянного слагаемого, поэтому нулевой уровень можно выбирать произвольно.

Центр тяжести рассматриваемого тела может находиться на высоте h выше нулевого уровня (рис. П12.1*а*), на высоте h ниже нулевого уровня (рис. П12.1*б*) или на нулевом уровне ($h = 0$). В последнем случае потенциальная энергия тела равна нулю: $W_{p0} = 0$.

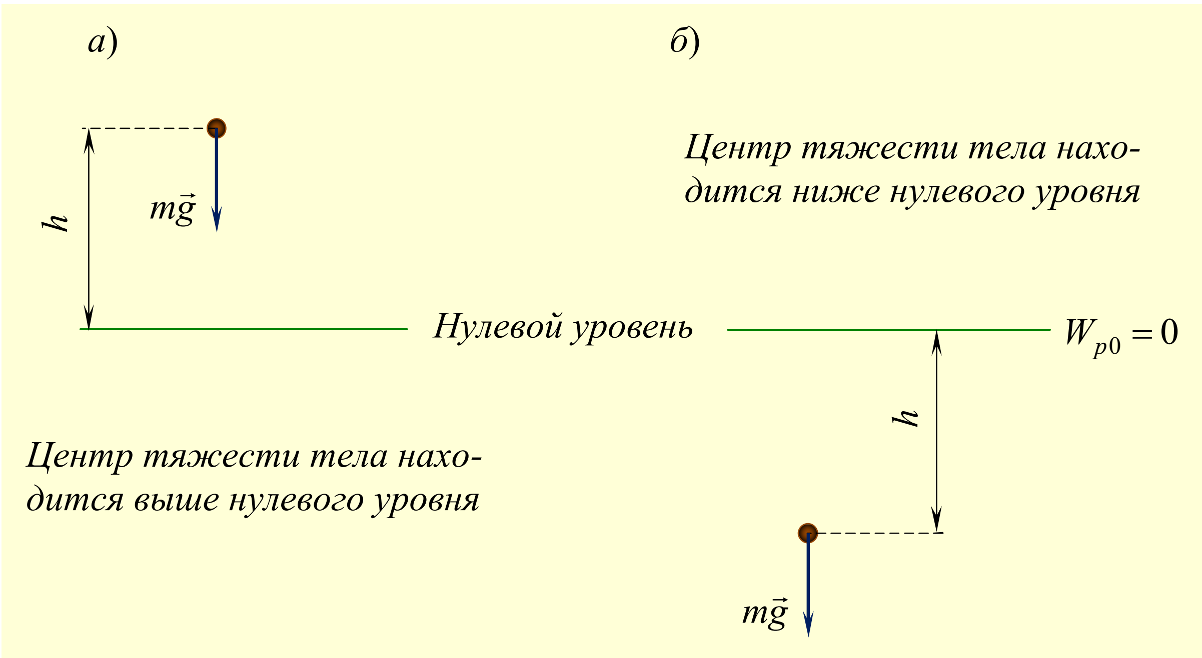

Рис. П12.1. Положение центра тяжести тела относительно нулевого уровня

Потенциальная энергия тела равна той работе, которую совершает сила тяжести при перемещении центра тяжести тела из данного положения на нулевой уровень.

Если центр тяжести тела находится на высоте h выше нулевого уровня, то:

$$W_{p1} = A_1 = mgh\,. \qquad (П12.1)$$

Если центр тяжести тела находится на высоте h ниже нулевого уровня, то:

$$W_{p2} = A_2 = -mgh\,. \qquad (П12.2)$$

Общую формулу для потенциальной энергии тела в однородном поле тяжести можно записать в виде:

$$W_p = \pm mgh\,. \qquad (П12.3)$$

Здесь h – высота центра тяжести тела относительно произвольно выбранного нулевого уровня; знак "плюс" берётся, если центр тяжести находится выше нулевого уровня; знак "минус" – если центр тяжести находится ниже нулевого уровня.

Потенциальная энергия упруго деформированной пружины

Рассмотрим линейную деформацию упругой пружины жёсткости k (рис. П12.2). Линейная деформация возникает при относительном перемещении концов пружины вдоль её оси. Не нарушая общности можно считать, что один из концов пружины неподвижен, а перемещается только второй конец. На рисунке П12.2*а* показана недеформированная пружина, на рисунке П12.2*б* – деформация сжатия, на рисунке П12.2*в* – деформация растяжения.

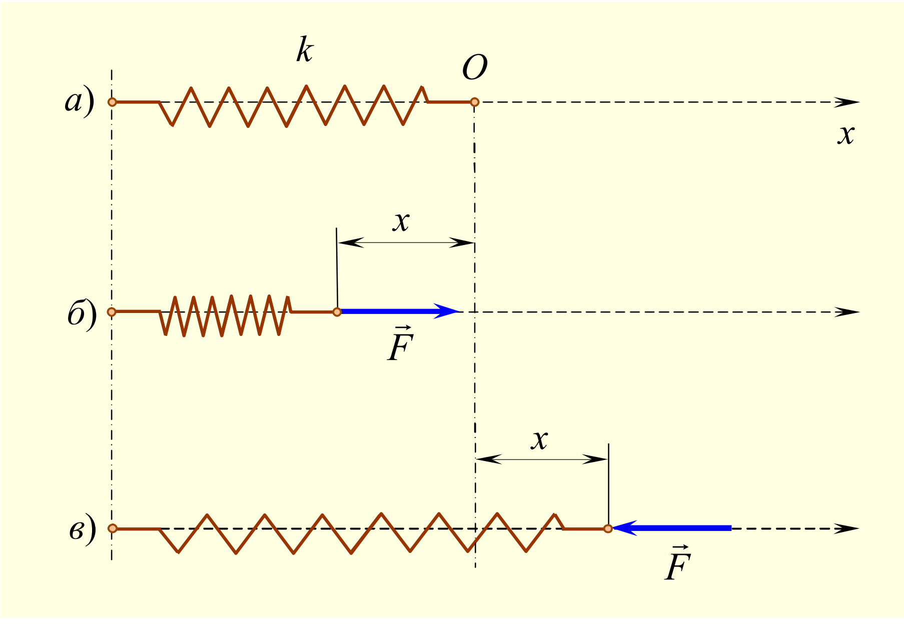

Рис. П12.2. Линейная деформация пружины

Проведём координатную ось Ox вдоль оси пружины, совместив точку O начала координат с положением правого конца недеформированной пружины. Левый конец будем считать неподвижным. В этом случае линейная деформация Δ пружины равна модулю координаты x правого конца пружины, как при её сжатии, так и при её растяжении:

$$\Delta = |x|. \tag{П12.4}$$

Нулевой уровень отсчёта потенциальной энергии выберем в состоянии, когда пружина не деформирована, т.е. когда правый конец пружины совпадает с началом координат. Тогда работа силы упругости пружины при её переходе из деформированного состояния сжатия или растяжения в недеформированное состояние будет определяться соотношением (см. Приложение 9):

$$A = \frac{kx^2}{2}. \tag{П12.5}$$

Потенциальная энергия W_p упруго деформированной пружины равна работе (П12.5). Учитывая (П12.4), получим

$$W_p = \frac{k\Delta^2}{2}. \tag{П12.6}$$

Потенциальная энергия пружины зависит только от величины линейной деформации Δ и не зависит от того, сжата пружина или растянута.

Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия

Рассмотрим гравитационное взаимодействие двух материальных точек (частиц) массами m_1 и m_2, находящихся на расстоянии r друг от друга (рис. П12.3).

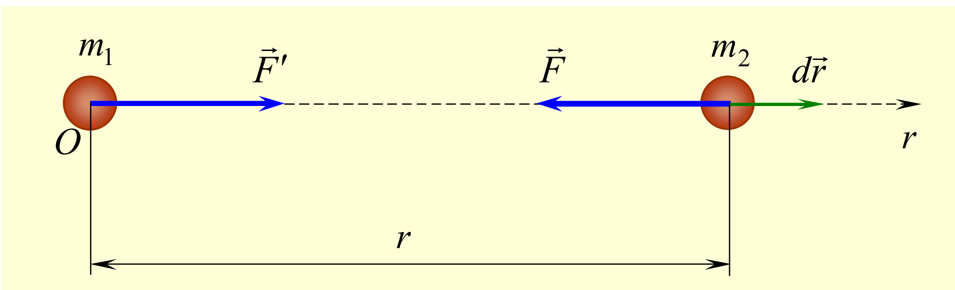

Рис. П12.3. Частица массы m_2 в гравитационном поле частицы массы m_1

Нулевой уровень потенциальной энергии выберем в состоянии, когда рассматриваемые материальные точки бесконечно удалены друг от друга, т.е. примем, что $W_p \to 0$ при $r \to \infty$.

Будем считать, что частица массы m_2 находится в гравитационном поле частицы массы m_1. Проведём координатную ось Or, начало которой совпадает с точкой массы m_1. Вычислим работу, совершаемую гравитационной силой $\vec{F}$ при удалении частицы массы m_2 из положения, определяемого координатой r, на бесконечность:

$$A_\infty = \int_r^\infty \vec{F} \cdot d\vec{r}\,. \qquad (\text{П}12.7)$$

Скалярное произведение силы $\vec{F}$ на элементарное перемещение $d\vec{r}$ (см. рис. П12):

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = F\,dr\cos 180^\circ = -F\,dr\,. \qquad (\text{П}12.8)$$

Модуль гравитационной силы (см. параграф 2.3, стр. 49):

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\,. \qquad (\text{П}12.9)$$

Подставим (П12.8), (П12.9) в (П12.7) и вынесем постоянные величины за знак интеграла:

$$A_\infty = -G m_1 m_2 \int_r^\infty \frac{dr}{r^2}\,. \qquad (\text{П}12.10)$$

После интегрирования получим:

$$A_\infty = -G\frac{m_1 m_2}{r}\,. \qquad (\text{П}12.11)$$

Потенциальная энергия частицы массы m_2 в гравитационном поле частицы массы m_1 равна работе (П12.11):

$$W_p = -G\frac{m_1 m_2}{r}\,. \qquad (\text{П}12.12)$$

Вследствие симметрии потенциальную энергию (П12.12) можно рассматривать также как потенциальную энергию частицы массы m_1 в гравитационном поле частицы массы m_2, а также как потенциальную энергию гравитационного взаимодействия частиц массами m_1 и m_2.