Приложение 11. Свойства консервативных сил

Работа консервативной силы по замкнутой траектории

Рассмотрим движение материальной точки (частицы) в потенциальном поле по замкнутой траектории (рис. П11.1). Пусть частица начинает своё движение из точки 1 и снова возвращается в эту же точку. Выберем на траектории частицы произвольную точку 2 и разобьём траекторию на две части: часть *a* – движение частицы из точки 1 в точку 2; часть *b* – движение частицы из точки 2 в точку 1.

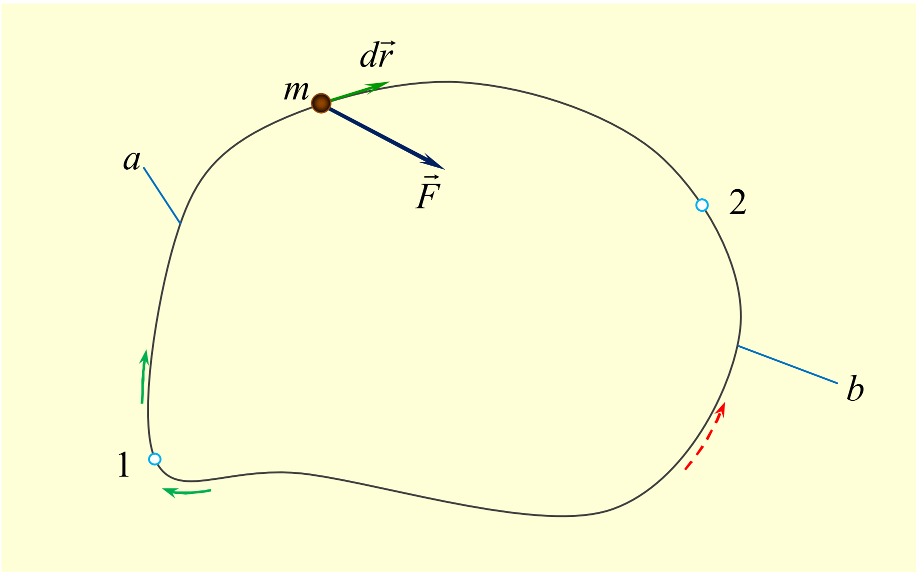

Рис. П11.1. Движение частицы по замкнутой траектории

Работу консервативной силы $\vec{F}$, совершаемую при движении частицы по замкнутой траектории можно представить в виде суммы:

$$A = A_{12}^{a} + A_{21}^{b}, \qquad (П11.1)$$

где A_{12}^{a} – работа, совершаемая силой $\vec{F}$ на участке *a*; A_{21}^{b} – работа, совершаемая силой $\vec{F}$ на участке *b* траектории.

Рассмотрим теперь возможное движение частицы из точки 1 в точку 2 поля. Такое движение может происходить по любой траектории, в том числе и по траектории *a*, и по траектории *b*. При движении частицы по траектории *a* сила $\vec{F}$ совершила бы работу A_{12}^{a}, а при движении частицы по траектории *b* – работу A_{12}^{b}. Т.к. сила $\vec{F}$ – консервативная, то её работа не зависит от траектории, а определяется только начальным и конечным положениями частицы. Следовательно:

$$A_{12}^{a} = A_{12}^{b}. \qquad (П11.2)$$

Движение частицы из точки 1 в точку 2 и обратное движение из точки 2 в точку 1 отличаются только направлением движения, а действующие силы в обоих движениях одинаковы. Поэтому:

$$A_{12}^{b} = -A_{21}^{b}. \qquad (П11.3)$$

Но тогда, согласно (П11.2):

$$A_{12}^{a} = -A_{21}^{b}. \qquad (П11.4)$$

Подставив (П11.4) в (П11.1), получим:

$$A = -A_{21}^{b} + A_{21}^{b} = 0. \qquad (П11.5)$$

Работа консервативной силы по замкнутой траектории равна нулю.

Этот результат можно обобщить, используя определение работы силы на конечном перемещении как интегральной суммы элементарных работ $\vec{F} \cdot d\vec{r}$, где $d\vec{r}$ – элементарное перемещение вдоль траектории. В случае замкнутой траектории интегрирование скалярного произведения $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ следует осуществлять по замкнутому контуру Г, проведённому вдоль траектории:

$$A = \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \qquad (П11.6)$$

Взятую по замкнутому контуру интегральную сумму скалярных произведений некоторого вектора на элементарное перемещение вдоль контура называют **циркуляцией вектора** по данному контуру. Соотношение (П11.6) показывает, что **работа силы по замкнутой траектории равна циркуляции силы по замкнутому контуру, проведённому вдоль данной траектории**.

Если замкнутый контур Г проведён в потенциальном поле ($A = 0$), то

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 . \qquad (П11.7)$$

Отсюда следует, что **циркуляция консервативной силы по любому замкнутому контуру, проведённому в потенциальном силовом поле, равна нулю**.

Проекции консервативной силы на оси координат

Воспользуемся общим соотношением (2.54) для элементарной работы силы (см. параграф 2.11) и соотношением (2.67) для элементарной работы консервативной силы (см. параграф 2.13):

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -dW_p . \qquad (П11.8)$$

Скалярное произведение двух векторов можно определить по формуле:

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz , \qquad (П11.9)$$

где F_x, F_y, F_z – проекции консервативной силы на координатные оси; dx, dy, dz – элементарные приращения (дифференциалы) координат точки приложения силы, равные проекциям вектора $d\vec{r}$ на оси координат.

Полный дифференциал функции трёх переменных $W_p(x, y, z)$ вычисляется как сумма произведений частных производных функции $W_p(x, y, z)$ по всем её аргументам на дифференциалы соответствующих аргументов:

$$dW_p = \frac{\partial W_p}{\partial x} dx + \frac{\partial W_p}{\partial y} dy + \frac{\partial W_p}{\partial z} dz . \qquad (П11.10)$$

Приравнивая правые части (П11.9) и (П11.10), получим уравнение:

$$F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz = -\frac{\partial W_p}{\partial x} dx - \frac{\partial W_p}{\partial y} dy - \frac{\partial W_p}{\partial z} dz . \qquad (П11.11)$$

Уравнение (П11.11) удовлетворяется, если равны между собой коэффициенты при дифференциалах координат в левой и правой частях уравнения. Приравнивая соответствующие коэффициенты, получим

$$F_x = -\frac{\partial W_p}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial W_p}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial W_p}{\partial z} . \qquad (П11.12)$$