

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

Учебное пособие. – Санкт-Петербург: <http://auditori-um.ru>, 2012

Приложение 10. Доказательство теоремы об изменении кинетической энергии механической системы

Рассмотрим перемещение произвольной механической системы n материальных точек массами m_1, m_2, \dots, m_n из начального положения 1 в некоторое положение 2. Пусть в начальном положении 1 точки системы имеют скорости $\vec{V}_{11}, \vec{V}_{21}, \dots, \vec{V}_{n1}$, а в конечном положении 2 – скорости $\vec{V}_{12}, \vec{V}_{22}, \dots, \vec{V}_{n2}$.

Будем считать, что на каждую точку системы действует одна внешняя сила $\vec{F}_i^{\text{внешн}}$ и одна внутренняя сила $\vec{F}_i^{\text{внутр}}$. Как уже указывалось (см. параграф 2.4, стр. 54, 55), такое предположение не нарушает общности рассуждений. При перемещении системы из положения 1 в положение 2 каждая внешняя сила $\vec{F}_i^{\text{внешн}}$ совершает работу $A_i^{\text{внешн}}$, а каждая внутренняя сила $\vec{F}_i^{\text{внутр}}$ – работу $A_i^{\text{внутр}}$.

Составим для всех материальных точек системы уравнения (2.64) теоремы об изменении кинетической энергии материальной точки:

$$\begin{aligned} \frac{m_1 V_{12}^2}{2} - \frac{m_1 V_{11}^2}{2} &= A_1^{\text{внешн}} + A_1^{\text{внутр}}, \\ \frac{m_2 V_{22}^2}{2} - \frac{m_2 V_{21}^2}{2} &= A_2^{\text{внешн}} + A_2^{\text{внутр}}, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{m_n V_{n2}^2}{2} - \frac{m_n V_{n1}^2}{2} &= A_n^{\text{внешн}} + A_n^{\text{внутр}}. \end{aligned} \tag{П10.1}$$

Сложим почленно уравнения (П10.1):

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i V_{i2}^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i V_{i1}^2 = \sum_{i=1}^n A_i^{\text{внешн}} + \sum_{i=1}^n A_i^{\text{внутр}}. \tag{П10.2}$$

Согласно соотношению (2.61) параграфа 2.12 (стр. 88):

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i V_{i1}^2 = W_{k1} \text{ — кинетическая энергия системы в начальном положении 1;}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i V_{i2}^2 = W_{k2} \text{ — кинетическая энергия системы в конечном положении 2.}$$

Следовательно, левая часть уравнения (П10.2) равна изменению кинетической энергии системы при её перемещении из положения 1 в положение 2.

Правая часть уравнения (П10.2) представляет собой сумму работ всех действующих на систему внешних и внутренних сил, совершаемых на данном перемещении системы.

Получаем уравнение теоремы об изменении кинетической энергии механической системы:

$$W_{k2} - W_{k1} = A^{\text{внешн}} + A^{\text{внутр}}, \quad (\text{П10.3})$$

$$\text{где } A^{\text{внешн}} = \sum_{i=1}^n A_i^{\text{внешн}}; \quad A^{\text{внутр}} = \sum_{i=1}^n A_i^{\text{внутр}}.$$