Приложение 1. Разложение ускорения точки на тангенциальную и нормальную составляющие

Рассмотрим движение точки M относительно некоторой системы отсчёта по произвольной траектории AB (рис. П1.1). Будем использовать подвижную систему координат с началом в точке M, которую называют **естественным трёхгранником** или **естественной системой координат**.

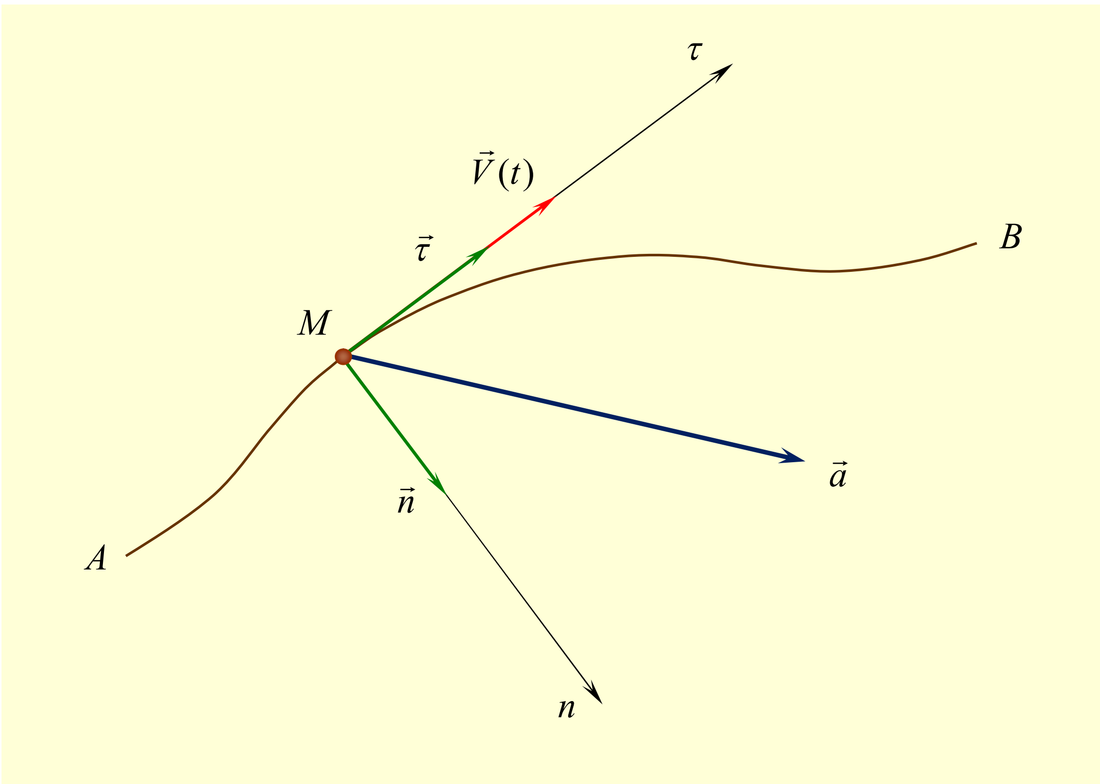

Рис. П1.1. Естественная система координат

Ось $M\tau$ (**касательная**) естественной системы координат в каждый момент времени направлена по скорости $\vec{V}$ точки. Ось Mn (**нормаль**) направлена по главной нормали к траектории в сторону вогнутости. Оси $M\tau$ и Mn лежат в соприкасающейся плоскости к той точке траектории, в которой в данный момент находится точка M. Следовательно, ускорение $\vec{a}$ точки в каждый момент времени лежит в координатной плоскости τMn.

Третья ось Mb (**бинормаль**) естественной системы координат направлена перпендикулярно соприкасающейся плоскости в ту сторону, откуда поворот от оси $M\tau$ к оси Mn виден против часовой стрелки. Поскольку ускорение $\vec{a}$ точки лежит в соприкасающейся плоскости, проекция ускорения на бинормаль в любой момент времени равна нулю. Следовательно, при разложении по осям естественного трёхгранника ускорение точки имеет только две составляющие: касательную $\vec{a}_\tau$ и нормальную $\vec{a}_n$. В связи с этим бинормаль на рисунке П.1 не показана.

Естественная система координат движется вместе с точкой M. При этом оси $M\tau$ и Mn поворачиваются так, чтобы в каждый момент времени ось $M\tau$ была направлена по касательной к траектории в сторону движения точки, а ось Mn – по главной нормали в сторону вогнутости траектории. Поэтому единичные векторы (орты) $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$ (см. рис. П.1) естественных осей являются переменными векторами. Модули единичных векторов $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$ равны безразмерной единице, и не изменяются с течением времени, но их направления, в общем случае, изменяются. Это необходимо учитывать при вычислении производных по времени.

Скорость $\vec{V}$ точки равна произведению модуля V скорости на орт оси $M\tau$:

$$\vec{V} = V\vec{\tau}\,. \qquad (П1.1)$$

Вычислим ускорение $\vec{a}$ точки как производную произведения двух функций времени в правой части (П1.1):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + V\frac{d\vec{\tau}}{dt}. \qquad (П1.2)$$

Первое слагаемое в правой части соотношения (П1.2) представляет собой тангенциальное ускорение:

$$\vec{a}_\tau = \frac{dV}{dt}\vec{\tau}\,. \qquad (П1.3)$$

Проекция тангенциального ускорения на направление скорости определяется производной модуля скорости по времени, а направление – единичным вектором $\vec{\tau}$ и знаком производной модуля скорости по времени.

Второе слагаемое в соотношении (П1.2) – нормальное ускорение точки:

$$\vec{a}_n = V\frac{d\vec{\tau}}{dt}. \qquad (П1.4)$$

Для определения величины и направления нормального ускорения необходимо выяснить, чему равна производная орта $\vec{\tau}$ по времени. Производная функции по времени определяет скорость изменения функции, а орт $\vec{\tau}$ изменяет только своё направление. Поэтому необходимо выяснить, как изменяется направление орта $\vec{\tau}$ за малый промежуток времени.

Скорость изменения направления орта $\vec{\tau}$ зависит от вида траектории. Делать какие-либо обобщения можно лишь для линий стандартного вида. Наилучшим образом для этого подходит окружность. Рассмотрим произвольную траекторию точки (рис. П1.2). Пусть в некоторый момент времени t движущаяся точка находится в положении M. Выделим в малой окрестности точки M две соседние точки траектории: M' и M''. Ввиду малости окрестности точки M можно считать, что все три точки лежат в одной плоскости, даже если траектория – пространственная линия.

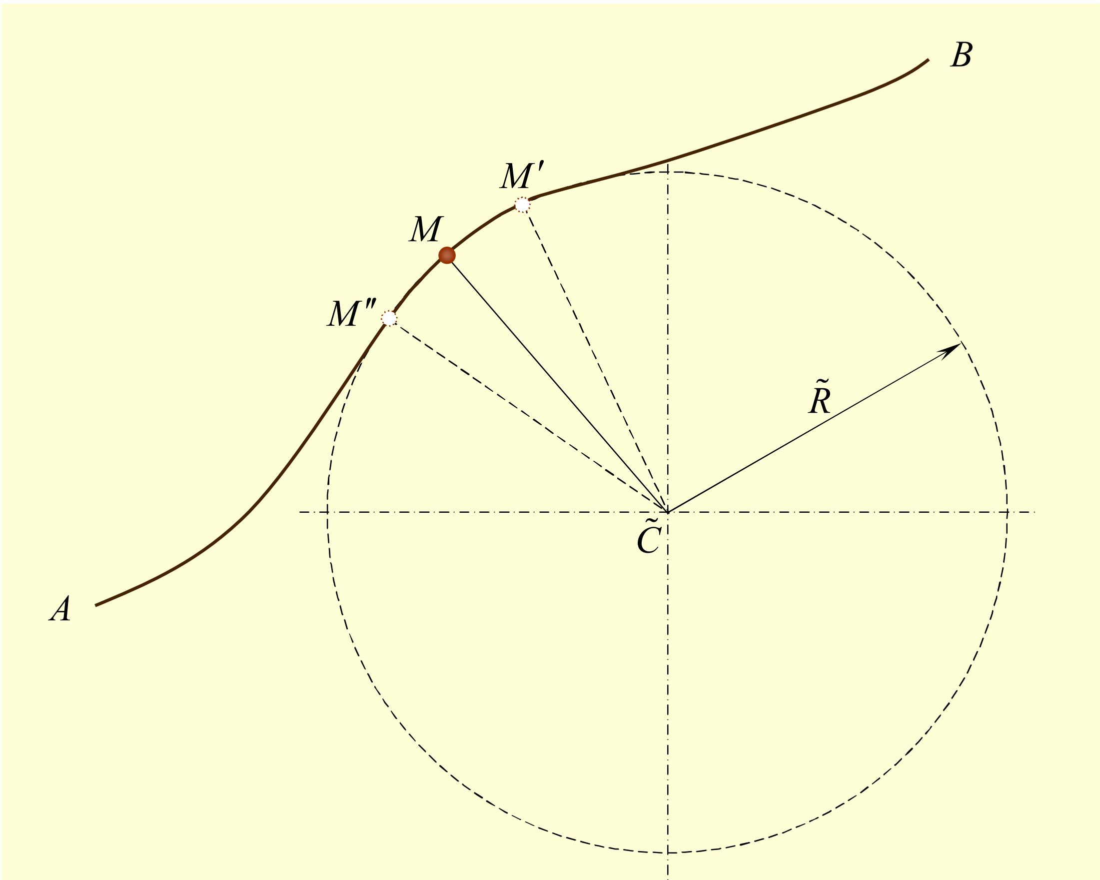

Рис. П1.2. К построению окружности кривизны

Через три точки, лежащие в одной плоскости, можно провести одну и только одну окружность. На рисунке П1.2 показана проведённая через точки M, M' и M'' окружность радиуса $\tilde{R}$, центром которой является точка $\tilde{C}$. Если устремить точки M' и M'' к точке M, то в пределе данная окружность будет стремиться к единственной для точки M окружности, которую называют **окружностью кривизны**.

Центр C окружности кривизны называют **центром кривизны**, а радиус R – **радиусом кривизны** в данной точке кривой линии. Величину, обратную радиусу кривизны, называют **кривизной** линии в данной точке.

Окружность кривизны лежит в соприкасающейся плоскости к данной точке кривой. Из всех касательных окружностей, которые можно провести в данной точке к рассматриваемой кривой, окружность кривизны имеет с данной кривой наибольший порядок соприкосновения, поэтому её также называют **соприкасающейся окружностью**.

Любую, сколь угодно сложную, траекторию можно представить как совокупность бесконечно малых дуг окружностей кривизны, лежащих в соприкасающихся плоскостях к точкам кривой. В том числе, и отрезки прямых линий можно рассматривать как дуги окружностей бесконечно большого радиуса.

Пусть за малый промежуток времени Δt движущаяся точка M перемещается в положение M', а орт $\vec{\tau}$ – в положение $\vec{\tau}'$ (рис. П1.3). Проведём перпендикуляры к ортам $\vec{\tau}$, $\vec{\tau}'$ и найдем их точку пересечения C'.

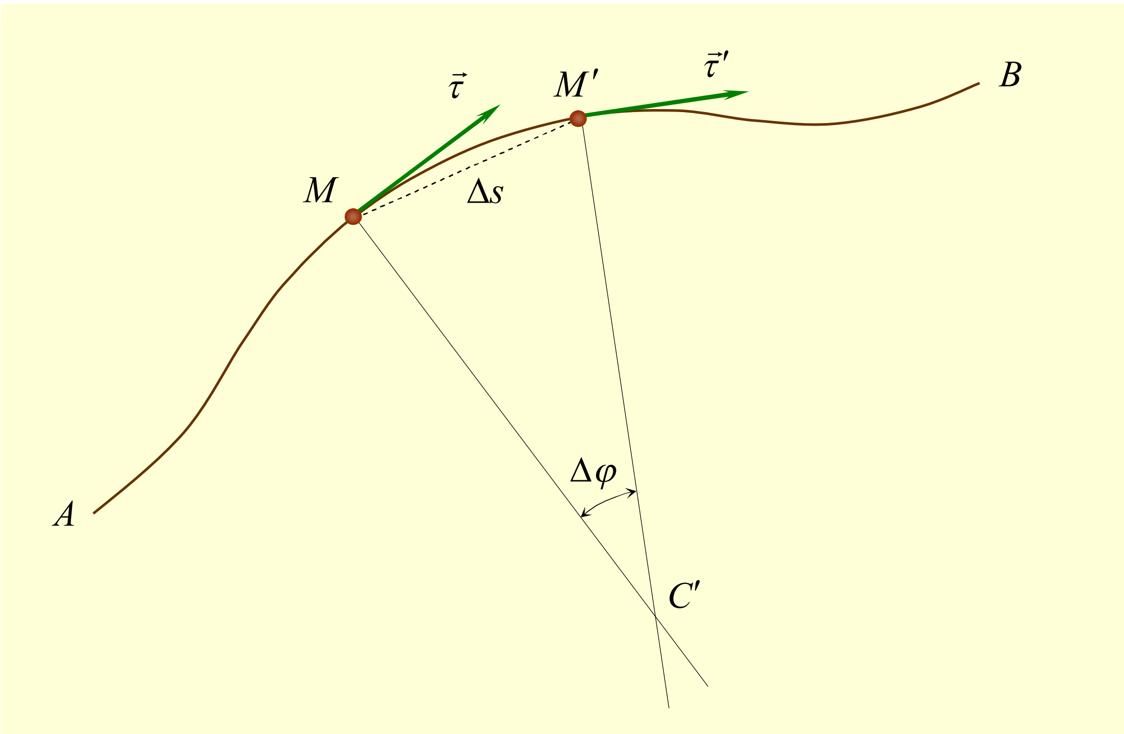

Рис. П1.3. Изменение орта касательной за малый промежуток времени

Если устремить Δt к нулю, то точка C' будет стремиться к центру кривизны C траектории в точке M. Участок MM' траектории будет стремиться совпасть с соответствующей дугой окружности кривизны.

Длина Δs стороны MM' треугольника $MC'M'$ в пределе равна длине ds дуги MM' окружности кривизны:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \Delta s = ds.$$

Длины отрезков MC' и $M'C'$ в пределе при $\Delta t \to 0$ равны радиусу кривизны R траектории в точке M:

$$\lim_{\Delta t \to 0} MC' = R; \ \lim_{\Delta t \to 0} M'C'' = R.$$

Треугольник $MC'M'$ в пределе при $\Delta t \to 0$ можно считать равнобедренным с углом $d\varphi = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta\varphi$ при вершине C.

Определим приращение $\Delta\vec{\tau}$ орта $\vec{\tau}$ за промежуток времени Δt. Для этого перенесём вектор $\vec{\tau}'$ параллельно самому себе в точку M (рис П1.4). Получим вектор $\vec{\tau}''$. Построим на чертеже приращение $\Delta\vec{\tau}$ как разность векторов $\vec{\tau}''$ и $\vec{\tau}$.

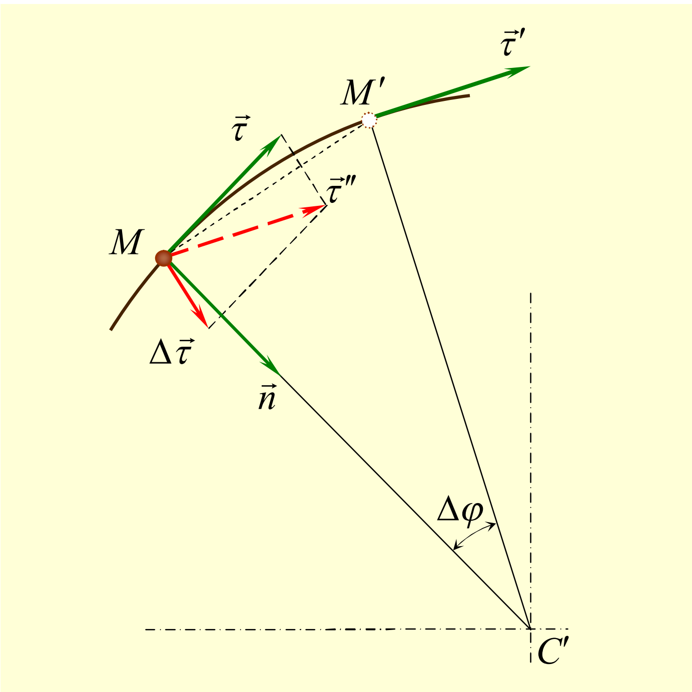

Рис. П1.4. Определение приращения орта $\vec{\tau}$

С учётом предельных соотношений можно считать, что треугольник, построенный на векторах $\vec{\tau}''$ и $\vec{\tau}$, подобен треугольнику $MC'M'$, т.к. оба треугольника – равнобедренные с одинаковым углом при вершине. Из подобия треугольников получим:

$$\Delta\tau = \frac{MM'}{MC'}|\vec{\tau}|.$$

Т.к. $\left|\vec{\tau}\right| = 1$, то

$$\Delta\tau = \frac{MM'}{MC'}. \tag{П1.5}$$

Перейдя в (П1.5) к пределу, при $\Delta t \to 0$, получим соотношение для модуля приращения орта $\vec{\tau}$:

$$d\tau = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\tau = \frac{ds}{R}. \tag{П1.6}$$

Из построения (см. рис.П1.5) видно, что направление вектора $\Delta\vec{\tau}$ почти совпадает с направлением орта $\vec{n}$. Причём, чем меньше промежуток времени Δt, тем ближе это совпадение. В пределе при $\Delta t \to 0$ направление вектора $d\vec{\tau}$ совпадает с направлением орта нормали $\vec{n}$. Это даёт основание для преобразования скалярного соотношения (П1.6) в векторное соотношение для приращения единичного вектора $\vec{\tau}$:

$$d\vec{\tau} = \vec{n}\, d\tau = \frac{ds}{R}\vec{n}\ . \tag{П1.7}$$

Подставим (П1.7) в (П1.4):

$$\vec{a}_n = V\frac{ds}{dt}\frac{1}{R}\vec{n}.$$

Учитывая, что $\frac{ds}{dt} = V$, получим окончательно:

$$\vec{a}_n = \frac{V^2}{R}\vec{n}. \tag{П1.8}$$

Модуль нормального ускорения в данный момент времени равен отношению квадрата скорости к радиусу кривизны траектории в той её точке, в которой в данный момент находится движущаяся точка. Направление нормального ускорения определяется ортом $\vec{n}$ нормали к данной точке траектории.