1.6. Кинематика вращательного движения твердого тела

Общие замечания

Вращательным называют такое движение, при котором имеется жестко связанная с телом прямая линия (**ось вращения**), точки которой остаются в процессе движения тела неподвижными (рис. 1.12). Для того чтобы прямая линия оставалась неподвижной, достаточно закрепить любые две ее точки.

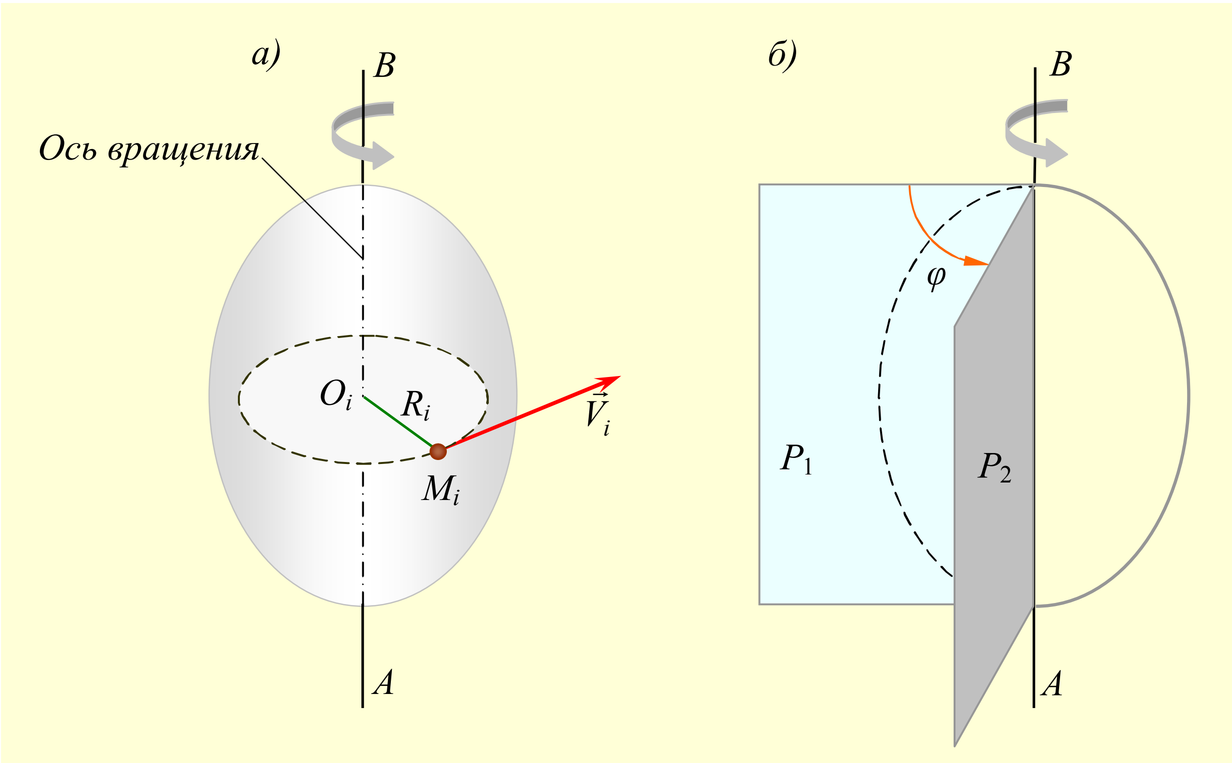

Рис. 1.12. Схема вращательного движения

Поскольку тело является абсолютно твердым, расстояние любой его точки от оси вращения остается неизменным (см. отрезок $M_iO_i = R_i$ на рисунке 1.12 *а*). Поэтому **траекториями всех точек тела при вращательном движении являются окружности, центры которых лежат на оси вращения** (см. траекторию точки M_i на рисунке 1.12 *а*).

Строго говоря, рассматриваемое движение следует называть **вращением твердого тела вокруг неподвижной оси**. Однако для краткости его часто называют **вращательным движением** или **вращением**.

Существует также движение твердого тела, при котором неподвижной остается только одна неизменно связанная с телом точка. Такое движение называют **вращением вокруг неподвижной точки** или **сферическим движением**.

В общем случае движения твердого тела, рассматривают как его поступательное движение вместе с полюсом, так и вращение вокруг **мгновенных осей**, т.е. осей вращения, которые изменяют свое положение и ориентацию в пространстве.

Задание вращательного движения

Определим способ задания вращательного движения. Для этого проведем две вспомогательные воображаемые плоскости. Неподвижную плоскость P_1 проведем через ось вращения и любую неподвижную точку пространства, не лежащую на оси (см. рис. 1.12 *б*). Плоскость P_1 будет служить системой отсчета для изучаемого движения. Другую (подвижную) плоскость P_2 проведем через ось вращения и произвольную точку тела, не лежащую на оси. Проведенная таким образом плоскость P_2 будет вращаться вместе с телом.

Двугранный угол φ между неподвижной плоскостью P_1 и плоскостью P_2, вращающейся вместе с телом, называют **углом поворота тела**.

Угол поворота φ в любой момент времени однозначно определяет положение вращающегося тела относительно системы отсчета P_1.

Для задания вращательного движения необходимо выбрать положительное направление отсчета угла поворота φ и задать его зависимость от времени:

$$\varphi = \varphi(t)\,. \tag{1.27}$$

Уравнение (1.27) называют **кинематическим уравнением вращательного движения**.

Если через любую точку M_i тела провести прямую линию, параллельную оси вращения, то такая линия будет двигаться поступательно, т.е. все ее точки будут иметь одинаковые траектории, скорости и ускорения. Поэтому достаточно изучить вращение любого сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси вращения, вокруг точки пересечения плоского сечения с осью вращения (рис. 1.13).

На рисунке 1.13 показаны: точка O пересечения секущей плоскости с осью вращения, след неподвижной плоскости P_1 , след подвижной плоскости P_2 , угол поворота φ, траектория и скорость произвольной точки M_i сечения тела.

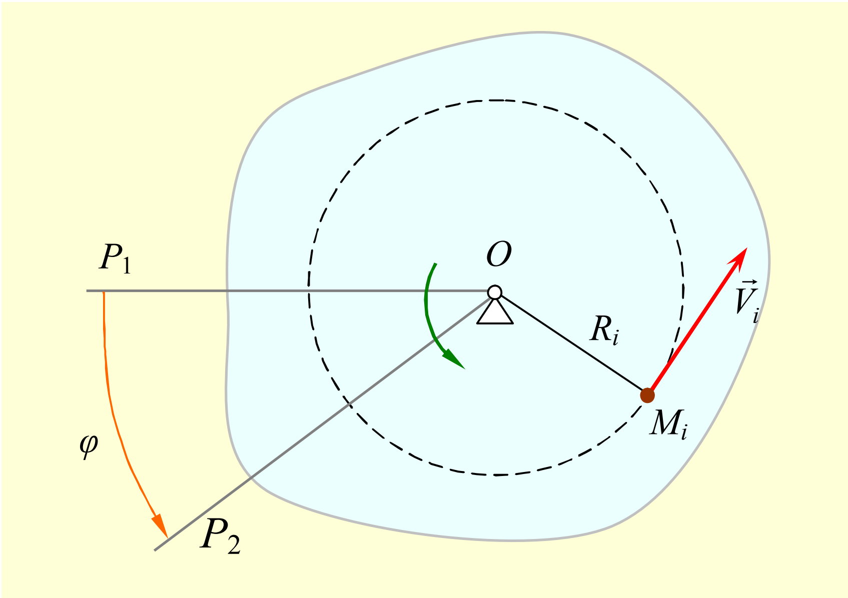

Рис. 1.13. Вращение плоского сечения тела

Основные кинематические характеристики вращательного движения

Основными называют такие характеристики, которые служат для описания движения тела в целом, а не отдельных его точек.

Основные кинематические характеристики вращательного движения должны описывать быстроту и направление изменения угла поворота (быстроту и направление вращения) и изменение быстроты и направления вращения.

Характеристикой быстроты и направления вращения служит **угловая скорость**.

Характеристикой изменения быстроты и направления вращения служит **угловое ускорение**.

Если ось вращения в выбранной системе отсчета неподвижна, то угловую скорость $\tilde{\omega}$ и угловое ускорение $\tilde{\varepsilon}$ рассматривают как алгебраические величины.

Вывод соотношения, определяющего угловую скорость, аналогичен выводу соотношения (1.6) для скорости точки. Средняя угловая скорость равна отношению приращения $\Delta\varphi$ угла поворота к промежутку времени Δt, за который произошло это приращение:

$$\langle\tilde{\omega}\rangle = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \tag{1.28}$$

Переходя в (1.28) к пределу при Δt, стремящемся к нулю, найдем угловую скорость в момент времени t:

$$\tilde{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \tag{1.29}$$

Угловая скорость $\tilde{\omega}$ равна производной угла поворота по времени.

Модуль $\omega = |\tilde{\omega}|$ угловой скорости характеризует быстроту вращения, а знак величины $\tilde{\omega}$ указывает направление вращения вокруг данной оси. Направление вращения определяется путем сопоставления знака величины $\tilde{\omega}$ и выбранного положительного направления отсчета угла поворота.

Если $\tilde{\omega} > 0$, то тело в данный момент времени вращается в направлении возрастания угла φ.

Если $\tilde{\omega} < 0$, то тело в данный момент времени вращается в направлении убывания угла φ.

Аналогично выводится соотношение для алгебраической величины углового ускорения. Среднее ускорение за промежуток времени Δt:

$$\langle\tilde{\varepsilon}\rangle = \frac{\Delta\tilde{\omega}}{\Delta t}. \tag{1.31}$$

где $\Delta\tilde{\omega}$ – приращение угловой скорости за время Δt. Переходя в (1.31) к пределу при Δt, стремящемся к нулю, и учитывая (1.29), получим угловое ускорение в момент времени t:

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} \tag{1.32}$$

или

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}.$$

Угловое ускорение $\tilde{\varepsilon}$ равно первой производной угловой скорости или второй производной угла поворота по времени

Характер вращения определяют путем сопоставления знаков $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\varepsilon}$. Если знаки $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\varepsilon}$ совпадают, то вращение – **ускоренное**. Если знаки $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\varepsilon}$ противоположны, то вращение – **замедленное**.

Единицы основных кинематических характеристик вращательного движения определяются формулами (1.29), (1.32): $[\omega]=1$ рад/с, $[\varepsilon]=1$ рад/с^2.

Векторы угловой скорости и углового ускорения

Во многих задачах необходимо определять положение оси вращения тела. Например, когда вращающееся тело находится на подвижном объекте (судне, автомобиле, самолете и т.п.), положение оси вращения постоянно изменяется. Для определения положения оси вращения и направления вращения вокруг данной оси угловую скорость рассматривают как векторную величину.

Вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ направляют вдоль оси вращения так, чтобы в направлении этого вектора вращение было видно по часовой стрелке (рис. 1.14).

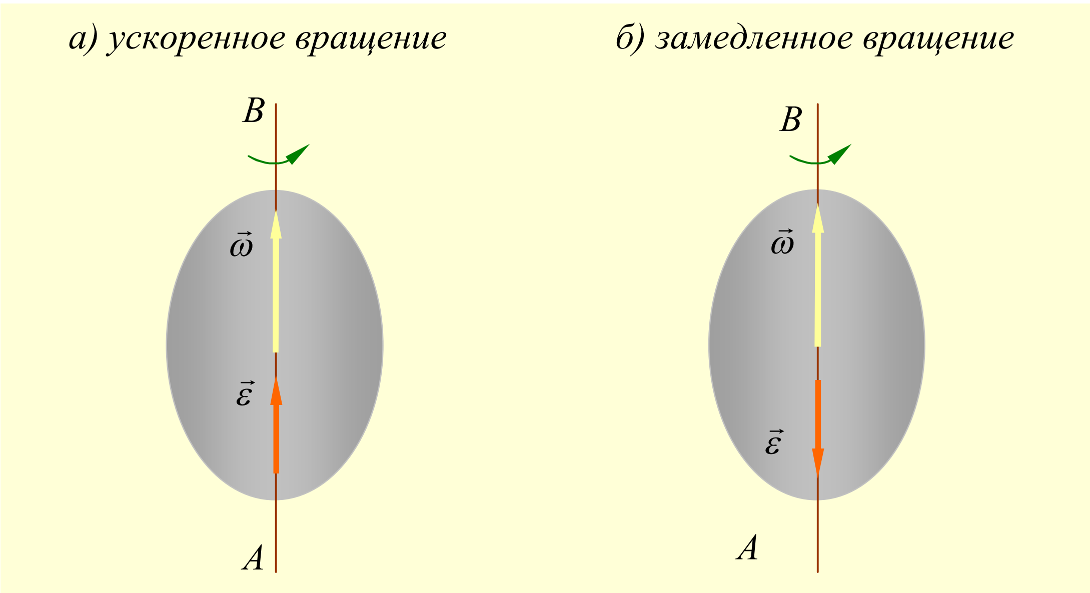

Рис. 1.14. Векторы угловой скорости и углового ускорения

Модуль вектора угловой скорости равен модулю производной угла поворота по времени:

$$|\vec{\omega}|=|\dot{\varphi}|=|\tilde{\omega}|. \qquad (1.33)$$

Если угловую скорость рассматривают как вектор, то и угловое ускорение также рассматривают как векторную величину.

Вектор углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ тела равен производной вектора угловой скорости по времени:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \tag{1.34}$$

Направление вектора $\vec{\varepsilon}$ определяется в результате дифференцирования вектора $\vec{\omega}$.

Если ось вращения неподвижна, то вектор $\vec{\varepsilon}$ направлен вдоль оси вращения: при ускоренном вращении направления векторов $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ совпадают (рис. 1.14 *а*), при замедленном вращении направления векторов $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ противоположны (рис. 1.14 *б*).

Если ось вращения тела изменяет свою ориентацию в пространстве, то, в общем случае, вектор $\vec{\varepsilon}$ не направлен вдоль оси вращения.

Определение линейных скоростей и ускорений

При изучении вращательного движения скорости и ускорения отдельных точек называют линейными. Термины **линейная скорость**, **линейное ускорение** здесь используют для того, чтобы подчеркнуть отличие этих величин от угловой скорости и углового ускорения.

Зная основные кинематические характеристики вращательного движения – угловую скорость и угловое ускорение, можно определить линейные скорости и линейные ускорения любой точки тела.

Рассмотрим элементарное угловое перемещение тела и элементарное перемещение произвольной точки M тела, находящейся на расстоянии R от оси вращения (рис. 1.15).

При повороте тела на бесконечно малый угол $d\varphi$ точка M получает перемещение $d\vec{r}$. Модуль этого вектора практически равен длине ds дуги MM' траектории: $|d\vec{r}| = ds$. Модуль скорости точки M:

$$V = \frac{|d\vec{r}|}{dt} = \frac{ds}{dt}. \tag{1.35}$$

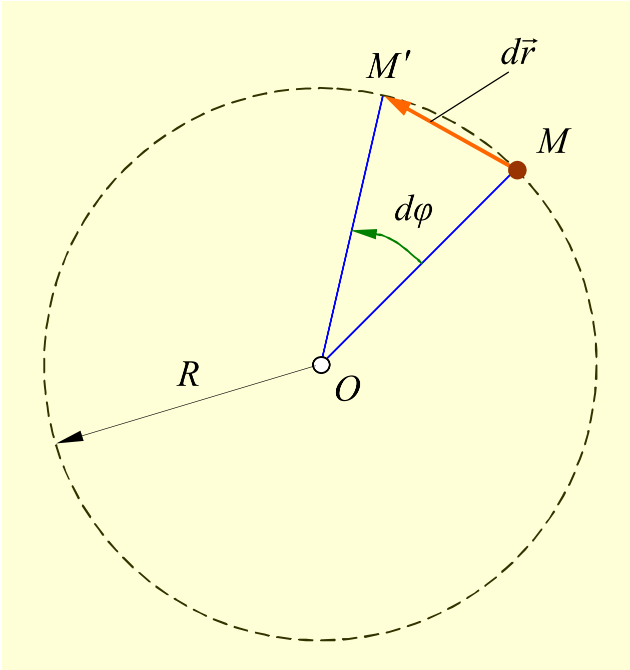

Рис. 1.15. Элементарное угловое перемещение

Для длины дуги окружности справедливо соотношение:

$$ds = R\left|d\varphi\right|. \tag{1.36}$$

Здесь элементарное угловое перемещение $d\varphi$ взято по модулю потому, что длина дуги ds – величина положительная, а величина $d\varphi$ может быть и положительной и отрицательной. Действительно, поворот тела может происходить как в направлении увеличения угла φ, тогда $d\varphi > 0$, так и в направлении уменьшения угла φ, тогда $d\varphi < 0$.

Подставив (1.36) в (1.35), получим

$$V = \frac{\left|d\varphi\right|}{dt} R. \tag{1.37}$$

Учтем, что

$$\frac{\left|d\varphi\right|}{dt} = \left|\frac{d\varphi}{dt}\right| = \omega,$$

где $\omega = \left|\tilde{\omega}\right|$ – модуль угловой скорости. Тогда формула для определения модуля линейной скорости примет следующий вид:

$$V = \omega R. \tag{1.38}$$

Используя (1.21), (1.22), получим формулы для определения модулей тангенциального и нормального ускорений точек вращающегося тела:

$$a_\tau = \varepsilon R \ , \ a_n = \omega^2 R \ . \qquad (1.39)$$

Здесь $\varepsilon = |\tilde{\varepsilon}|$ – модуль углового ускорения.

Направления линейных скоростей и ускорений показаны на рис. 1.16. Нормальное ускорение $\vec{a}_n$ при вращательном движении всегда направлено к центру окружности, являющейся траекторией точки тела. Поэтому нормальное ускорение точки вращающегося тела называют также **центростремительным ускорением**.

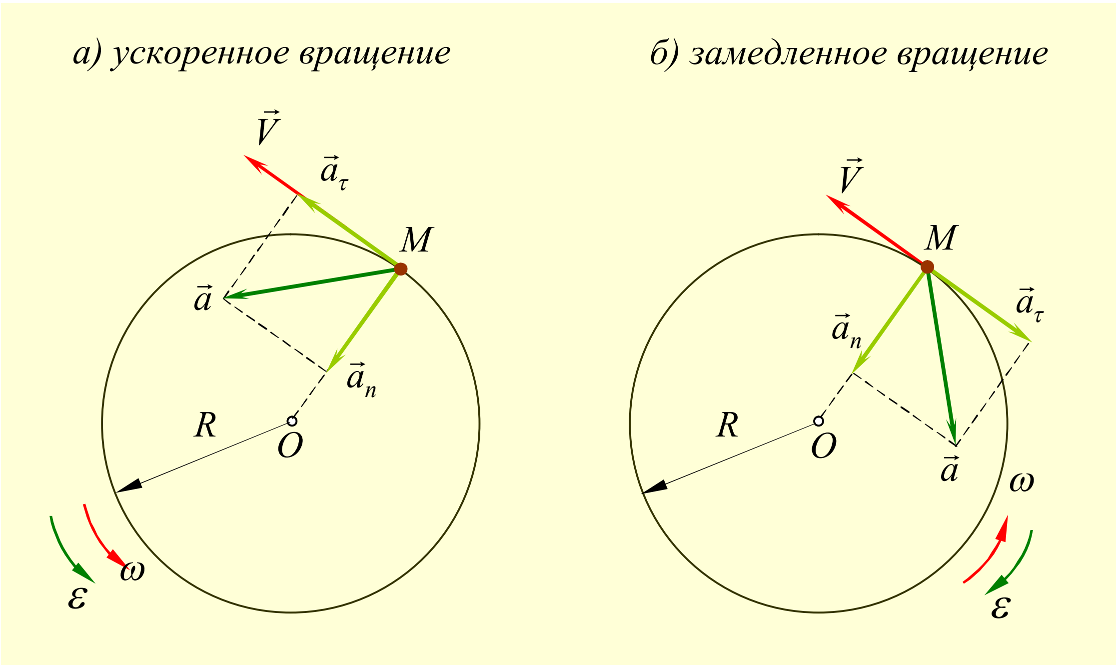

Рис. 1.16. Линейные скорости и ускорения

С учетом (1.39) модуль полного линейного ускорения равен

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \ . \qquad (1.40)$$

Как видно из полученных соотношений (1.38) – (1.40), **модули скорости, тангенциального, нормального и полного ускорений точки вращающегося тела пропорциональны кратчайшему расстоянию *R* от данной точки тела до оси вращения**.