1.3. Ускорение точки

Во многих случаях скорость точки не остается постоянной. Скорость – вектор, поэтому, даже если модуль скорости не меняется, но изменяется направление движения точки, то вектор скорости является переменной величиной. Для характеристики изменения скорости используется физическая величина, называемая ускорением точки.

Ускорение точки – вектор, характеризующий изменение модуля и направления скорости точки.

Для вывода ускорения рассмотрим изменение скорости точки за некоторый малый промежуток времени Δt (рис. 1.7).

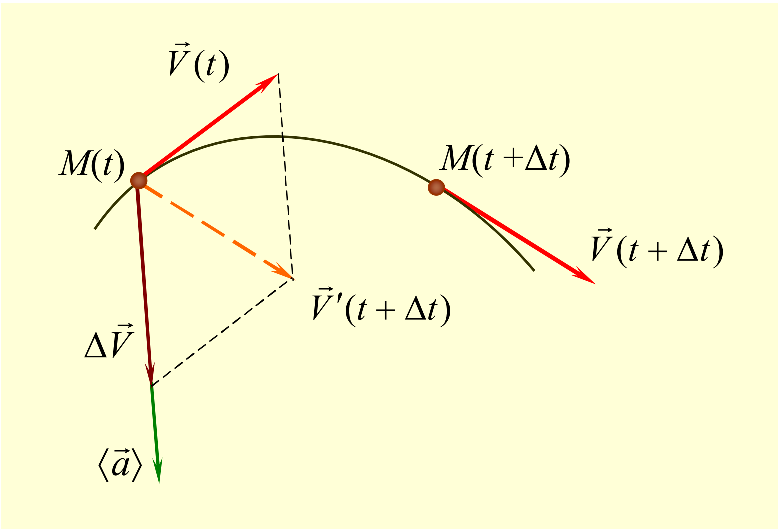

Рис. 1.7. Ускорение точки

За время Δt вектор скорости изменяется на величину

$$\Delta\vec{V} = \vec{V}(t+\Delta t) - \vec{V}(t). \qquad (1.11)$$

Величину $\Delta\vec{V}$ называют **приращением скорости** точки за промежуток времени Δt. Чтобы построить вектор $\Delta\vec{V}$ на чертеже, перенесем вектор скорости $\vec{V}(t+\Delta t)$ параллельно самому себе в точку $M(t)$. Получим вектор $\vec{V}'(t+\Delta t)$ (см. рис. 1.7).

Используя правило параллелограмма, построим вектор $\Delta\vec{V}$. Согласно данному построению вектор $\Delta\vec{V}$ может быть направлен только в сторону вогнутости траектории.

Средним ускорением $\langle\vec{a}\rangle$ точки называют вектор, равный отношению приращения $\Delta\vec{V}$ скорости точки к промежутку времени Δt, за который произошло это приращение:

$$\langle\vec{a}\rangle = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}. \qquad (1.12)$$

Вектор $\langle\vec{a}\rangle$ направлен так же, как вектор $\Delta\vec{V}$, т.е. в сторону вогнутости траектории.

Среднее ускорение, как и средняя скорость, зависит от выбора промежутка времени Δt. Для получения объективной характеристики изменения скорости перейдем в (1.12) к пределу при Δt, стремящимся к нулю.

Вектор, равный пределу среднего за время Δt ускорения при Δt, стремящимся к нулю, является ускорением точки в момент времени *t*:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}. \qquad (1.13)$$

Величина, определяемая соотношением (1.13) равна производной функции $\vec{V}(t)$ по ее аргументу *t*.

Ускорение точки равно производной вектора скорости точки по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \dot{\vec{V}}. \qquad (1.14)$$

Поскольку скорость точки равна первой производной радиус-вектора по времени, ускорение равно второй производной радиус-вектора по времени:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}. \qquad (1.15)$$

При уменьшении величины Δt плоскость, проведенная через векторы $\vec{V}(t)$ и $\vec{V}'(t+\Delta t)$, поворачивается и в пределе при Δt, стремящимся к нулю, совпадает с так называемой **соприкасающейся плоскостью**. Соприкасающейся является касательная плоскость, имеющая с данной кривой в данной точке наибольший порядок соприкосновения.

Ускорение $\vec{a}$ в любой момент времени лежит в соприкасающейся с траекторией плоскости и всегда направлено в сторону вогнутости траектории.

На рисунке 1.8 показан пример расположения соприкасающейся плоскости, когда точка движется по поверхности цилиндра, описывая винтовую линию.

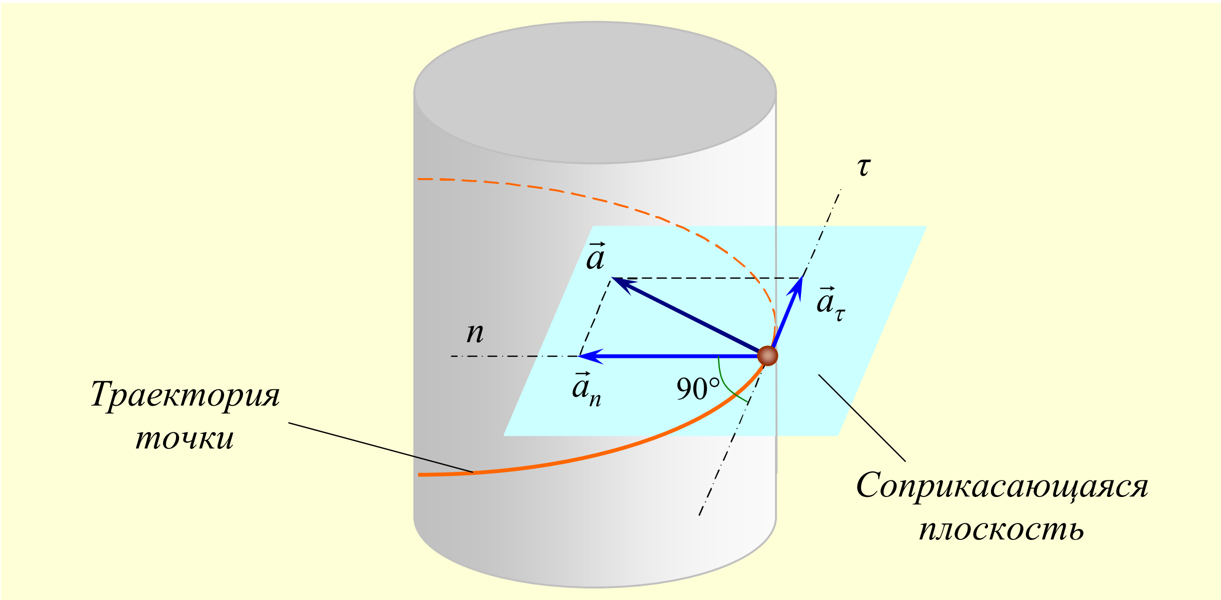

Рис. 1.8. Направление ускорения точки, движущейся по винтовой линии

Как и любой вектор, ускорение можно разложить на составляющие по осям координат:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\,, \tag{1.16}$$

где a_x, a_y, a_z – проекции ускорения на оси координат. Продифференцировав (1.8) по времени и сравнив полученное выражение с (1.16), приходим к выводу: **проекции ускорения на оси координат равны производным соответствующих проекций скорости по времени**:

$$a_x = \dot{V}_x\,,\ a_y = \dot{V}_y\,,\ a_z = \dot{V}_z\,. \tag{1.17}$$

Т.к. проекции скорости равны первым производным координат по времени, то проекции ускорения равны вторым производным соответствующих координат по времени:

$$a_x = \ddot{x} \ , \ a_y = \ddot{y} \ , \ a_z = \ddot{z} \, . \tag{1.18}$$

Модуль ускорения равен корню квадратному из суммы квадратов его проекций:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \, . \tag{1.19}$$

Направление ускорения аналитически можно задать с помощью углов, которые вектор $\vec{a}$ составляет в данный момент времени с направлениями осей координат. Для определения указанных углов используют **направляющие косинусы**:

$$\cos\theta_x = \frac{a_x}{a}; \quad \cos\theta_y = \frac{a_y}{a}; \quad \cos\theta_z = \frac{a_z}{a} \ ,$$

где θ_x, θ_y, θ_z – углы, которые вектор $\vec{a}$ составляет с направлениями осей *Ox*, *Oy* и *Oz*, соответственно.

Единица ускорения в СИ: $[a] = 1$ м/с^2.