2.8. Момент импульса

Как уже указывалось (см. параграф 2.6), импульс не может служить мерой вращательного движения механической системы. Чтобы понять, какую величину следует выбрать в качестве таковой меры, можно предварительно воспользоваться следующими рассуждениями.

С формальной точки зрения по правилам, разработанным для вычисления момента силы, можно вычислять момент любого вектора. Логично предположить, что вычисленный по этим правилам момент вектора импульса будет искомой мерой вращательного движения.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим сначала простейший случай движения материальной точки вокруг некоторого центра.

Момент импульса материальной точки

Пусть материальная точка массы m движется вокруг некоторого центра O под действием силы $\vec{F}$ (рис. 2.14 *а*). Выясним, какая величина изменяется при действии на материальную точку момента этой силы.

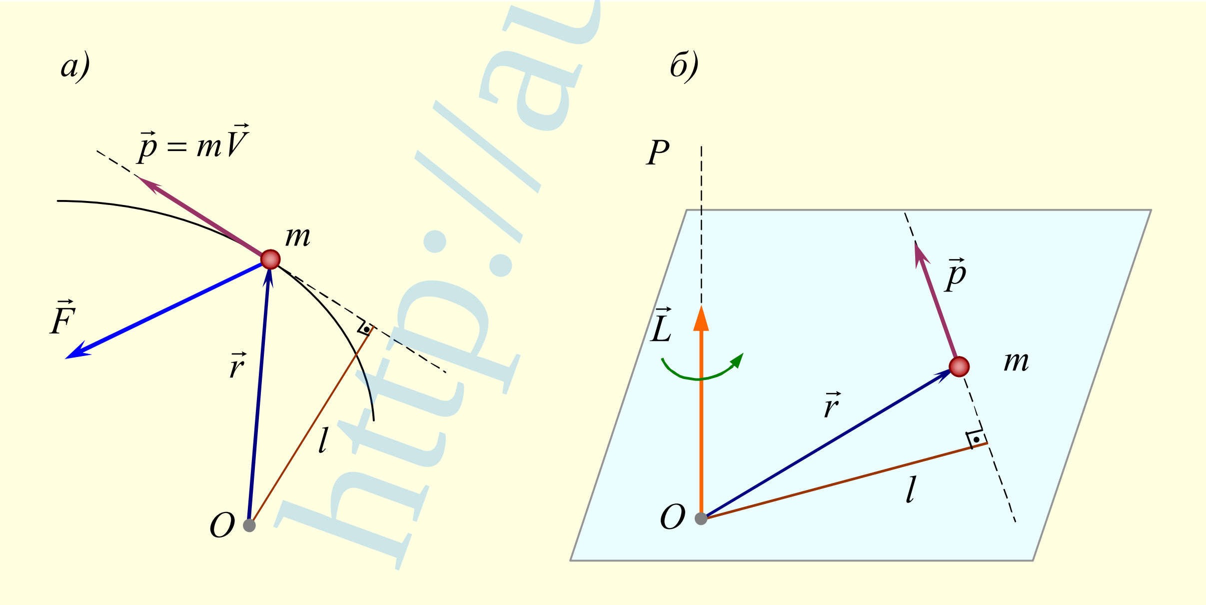

Рис. 2.14. Момент импульса материальной точки

Вычислим момент силы $\vec{F}$ относительно центра O и воспользуемся вторым законом Ньютона:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times m\frac{d\vec{V}}{dt}. \tag{2.30}$$

Можно показать (см. Приложение 7), что

$$\vec{r} \times m\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt}, \tag{2.31}$$

где $\vec{p} = m\vec{V}$ – импульс материальной точки. Следовательно,

$$\vec{M} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt}. \tag{2.32}$$

Соотношение (2.32) показывает, что при действии на материальную точку момента $\vec{M}$ изменяется векторная величина

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{V}, \tag{2.33}$$

Величину $\vec{L}$, определяемую соотношением (2.33), называют **моментом импульса материальной точки** относительно центра O.

Единица момента импульса в СИ: $[L] = 1$ кг·м^2/с.

Сравнение соотношений (2.33) и (2.29) показывает, что правила вычисления момента импульса и момента силы совпадают. На основании этого можно сделать следующий вывод: **момент импульса материальной точки относительно центра или оси определяется по тем же правилам, что и момент силы.**

Модуль момента импульса материальной точки относительно центра:

$$L = pl = mVl, \tag{2.34}$$

где l – плечо импульса (см. рис. 2.14 *а*).

Вектор-момент импульса материальной точки $\vec{L}$ определяется соотношением (2.33). Направлен вектор $\vec{L}$ перпендикулярно плоскости, проведенной через импульс $\vec{p}$ и центр, относительно которого определяется момент импульса, так, что вдоль вектора $\vec{L}$ движение материальной точки вокруг данного центра видно по часовой стрелке (см. рис. 2.14 *б*).

На основании принципа независимости действия сил соотношение (2.32) можно обобщить на действие произвольного количества n сил. Пусть каждая приложенная к материальной точке сила создаёт относительно данного центра момент $\vec{M}_i$. Тогда:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i . \qquad (2.35)$$

Соотношение (2.35) выражает **теорему об изменении момента импульса материальной точки**.

Теорема об изменении момента импульса материальной точки

Скорость изменения момента импульса материальной точки относительно некоторого центра равна сумме моментов относительно того же центра всех действующих на материальную точку сил.

Момент импульса механической системы

Результат, полученный для простейшего объекта – материальной точки, необходимо распространить на любую механическую систему. Рассмотрим произвольную механическую систему n материальных точек с массами m_i. Выберем в пространстве некоторый центр и составим относительно этого центра уравнения (2.35) для каждой точки системы:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{M}_i^{внешн} + \vec{M}_i^{внутр}; \\ i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \qquad (2.36)$$

Здесь $\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$ – момент импульса i-й материальной точки относительно выбранного центра; $\vec{M}_i^{внешн}$, $\vec{M}_i^{внутр}$ – моменты равнодействующих, соответственно, внешних и внутренних сил, действующих на i-ю точку системы, относительно того же центра.

Сложив почленно уравнения (2.36) и учитывая второе свойство внутренних сил (сумма моментов внутренних сил равна нулю), получим:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\vec{L}_i = \vec{M}^{внешн}, \qquad (2.37)$$

где $\vec{M}^{внешн}$ – сумма моментов внешних сил относительно выбранного центра. Сумму в левой части соотношения (2.37) называют **моментом импульса механической системы относительно данного центра**:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n}\vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i \times \vec{p}_i. \qquad (2.38)$$

Момент импульса механической системы относительно некоторого центра равен сумме моментов импульса относительно того же центра всех её материальных точек.

При решении практических задач векторные соотношения проектируют на координатные оси. **Момент импульса механической системы относительно некоторой оси равен проекции на эту ось момента импульса механической системы относительно любого центра, взятого на данной оси.** В частности, если центр для вычисления момента импульса $\vec{L}$ взять в начале координат, то моменты импульса L_x, L_y, L_z относительно координатных осей будут равны проекциям вектора $\vec{L}$ на соответствующие оси координат.

Проведём через центр, относительно которого определён момент импульса $\vec{L}$, какую-либо координатную ось, например, ось *Oz*. Спроектируем соотношение (2.38) на выбранную ось:

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} L_{iz}. \qquad (2.39)$$

Здесь L_z – момент импульса механической системы; L_{iz} – момент импульса *i*-ой материальной точки системы относительно оси *Oz*. Полученный результат справедлив для любой произвольно выбранной координатной оси.

Момент импульса механической системы относительно некоторой оси равен сумме моментов импульса относительно той же оси всех её материальных точек.

Соотношения (2.38), (2.39) показывают, что момент импульса механической системы – аддитивная величина.

Теорема об изменении момента импульса механической системы

Используя обозначение (2.38), уравнение (2.37) можно записать в форме:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{внешн}. \tag{2.40}$$

Это уравнение выражает **теорему об изменении момента импульса механической системы**. Здесь производная по времени определяет скорость изменения величины и направления вектора $\vec{L}$.

Теорема об изменении момента импульса механической системы

Скорость изменения момента импульса механической системы относительно некоторого центра равна сумме моментов относительно того же центра всех действующих на данную механическую систему внешних сил.

Сформулированная ранее теорема об изменении момента импульса материальной точки является частным случаем теоремы об изменении момента импульса механической системы.

Моменты внутренних сил в уравнение (2.40) не входят. На изменение момента импульса механической системы могут влиять только внешние силы. **Внутренние силы не могут изменить момент импульса механической системы**.

Спроектируем уравнение (2.40) на какую-либо координатную ось, например, на ось Oz:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^{внешн}. \tag{2.41}$$

Здесь L_z – момент импульса механической системы относительно оси Oz; $M_z^{внешн}$ – сумма моментов относительно оси Oz всех действующих на систему внешних сил. Уравнение (2.41) выражает частный случай теоремы об изменении момента импульса: **скорость изменения момента импульса механической системы относительно некоторой оси равна сумме моментов относительно той же оси всех действующих на данную механическую систему внешних сил.**