2.5. Импульс механической системы

Рассмотрим произвольную механическую систему n материальных точек. В соответствии с прямым методом составим для каждой материальной точки массы m_i, имеющей импульс $\vec{p}_i$, основное уравнение динамики в форме (2.9):

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_1^{внешн} + \vec{F}_1^{внутр}; \\ \dfrac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_2^{внешн} + \vec{F}_2^{внутр}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d\vec{p}_n}{dt} = \vec{F}_n^{внешн} + \vec{F}_n^{внутр}. \end{cases} \tag{2.16}$$

Число уравнений (2.16) равно числу материальных точек рассматриваемой механической системы.

Поставим задачу: преобразовать n уравнений (2.16) так, чтобы получить одно уравнение, которое описывает механическую систему в целом, а не каждую её отдельную материальную точку. Наиболее просто это можно сделать путём почленного сложения всех уравнений (2.16). При этом сумма левых частей должна равняться сумме правых частей складываемых уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{внешн} + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{внутр}. \tag{2.17}$$

Поскольку сумма внутренних сил любой системы равна нулю (первое свойство внутренних сил), в правой части уравнения (2.17) остается только сумма действующих на систему внешних сил:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{внутр} = 0; \quad \vec{F}^{внешн} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{внешн}. \tag{2.18}$$

Преобразуем левую часть уравнения (2.17):

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d\vec{p}_i}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i\right). \quad (2.19)$$

Запишем уравнение (2.17) с учётом (2.18), (2.19):

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i\right)=\vec{F}^{внешн}. \quad (2.20)$$

Видим, что суммарное действие внешних сил на систему приводит к изменению величины, стоящей в скобках уравнения (2.20). Логично именно эту величину взять в качестве интегральной меры движения – **импульса механической системы**.

Импульсом механической системы называют вектор $\vec{p}$, равный сумме импульсов всех её материальных точек:

$$\vec{p}=\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i=\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{V}_i, \quad (2.21)$$

Импульс механической системы – аддитивная величина (от *англ.* add – прибавлять, складывать, суммировать).

Левая часть уравнения (2.20) равна производной импульса $\vec{p}$ по времени, т.е. скорости изменения импульса механической системы, и уравнение (2.20) принимает следующий вид:

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}^{внешн}. \quad (2.22)$$

Полученное уравнение (2.22) выражает **теорему об изменении импульса механической системы**.

<u>Теорема об изменении импульса механической системы</u>

Скорость изменения импульса механической системы равна векторной сумме всех действующих на систему внешних сил.

Данная теорема исключает из рассмотрения внутренние силы. **Внутренние силы не могут изменить импульс механической системы**. Импульсы отдельных частей системы внутренние силы могут изменять, но суммарный импульс системы от действия внутренних сил не зависит.

Импульс механической системы определяется путём векторного сложения множества импульсов отдельных точек системы. Это далеко не всегда просто сделать, особенно, когда рассматривается сплошное тело, состоящее из бесконечного множества материальных точек. Но если рассмотреть движение центра масс механической системы, то можно получить очень простой способ определения её импульса.

Продифференцируем по времени формулу (2.15) для радиус-вектора центра масс:

$$m\frac{d\vec{r}_C}{dt} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}.$$

Здесь $\dfrac{d\vec{r}_C}{dt} = \vec{V}_C$ – скорость центра масс; $\dfrac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{V}_i$ – скорость *i*-й точки механической системы. Следовательно

$$m\,\vec{V}_C = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V}_i = \vec{p}\,.$$

Импульс механической системы равен произведению массы системы на скорость её центра масс:

$$\vec{p} = m\,\vec{V}_C\,. \qquad (2.23)$$

Полученная формула (2.23) не только упрощает определение импульса механической системы, но и позволяет сформулировать теорему об изменении импульса как теорему о движении центра масс системы. Для этого продифференцируем (2.23) по времени:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\left(m\vec{V}_C\right)}{dt} = m\frac{d\vec{V}_C}{dt} = m\,\vec{a}_C\,. \qquad (2.24)$$

Здесь $\vec{a}_C = \dfrac{d\vec{V}_C}{dt}$ – ускорение центра масс системы.

Сравнивая (2.24) и (2.22), получим

$$m\vec{a}_C = \vec{F}^{внешн}. \tag{2.25}$$

Уравнение (2.25) выражает теорему о движении центра масс механической системы.

Теорема о движении центра масс механической системы

Произведение массы механической системы на ускорение её центра масс равно сумме действующих на систему внешних сил.

Внутренние силы в уравнение (2.25) не входят. На ускорение $\vec{a}_C$, которое характеризует изменение скорости центра масс, могут влиять только внешние силы. **Внутренние силы не могут изменить скорость центра масс механической системы**.

Уравнение (2.25) по форме совпадает с основным уравнением динамики материальной точки (2.8). Совместим с центром масс какой-либо системы материальную точку масса, которой равна массе системы. Приложим к этой материальной точке все внешние силы, которые действуют на данную систему. В этом случае движение материальной точки и движение центра масс системы будут описываться одним и тем же уравнением. А, следовательно, при одинаковых начальных условиях они и двигаться будут одинаково.

Центр масс механической системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена вся масса системы и к которой приложены все действующие на систему внешние силы.

Теорема о движении центра масс определяет практический смысл динамики точки: когда мы рассматриваем тело как материальную точку, мы фактически изучаем движение центра масс этого тела.