2.13. Потенциальная энергия

Опыт показывает, что при определённых условиях тела могут совершать работу за счёт изменения своего положения в пространстве и изменения взаимного расположения составных частей тела.

Возьмём в качестве примера тело, которое находится на некоторой высоте над горизонтальной плитой в однородном поле тяжести. Если отпустить тело, и оно упадёт на плиту, то тело совершит определённую работу. В результате произведённой телом работы возникнут деформации тела и плиты, увеличится скорость теплового движения молекул, т.е. произойдет нагревание тела и плиты. Уже сам факт нахождения тела на определённой высоте делает его способным совершить работу при изменении своего положения в поле сил тяжести.

Рассмотрим ещё один пример. Возьмём растянутую или сжатую пружину. Если пружину отпустить, то при возращении в недеформированное состояние она совершит работу, в результате которой могут быть перемещены связанные с пружиной тела и произойдёт нагревание как самой пружины, так и связанных с ней тел. В данном случае работа совершается вследствие изменения взаимного расположения концов пружины (изменения конфигурации пружины).

Приведённые примеры показывают, что механическая система может совершать работу как при изменении своего положения в силовом поле, так и при изменении своей конфигурации. Функцией состояния, характеризующей способность механической системы совершать работу за счёт указанных изменений, является её потенциальная энергия W_p .

Потенциальная энергия механической системы – часть механической энергии, зависящая от положения частиц системы во внешнем силовом поле и от взаимного расположения частиц системы (от конфигурации системы).

Потенциальной энергией обладают тела, находящиеся в силовых полях особого рода. Поэтому рассмотрим понятие силового поля, виды силовых полей и выясним, в каких силовых полях тела обладают потенциальной энергией.

Силовое поле

Силовым полем или полем сил называют область пространства, в которой на помещенные туда тела действуют силы, зависящие от положения тел в пространстве и, в общем случае, от времени.

Силовое поле называют **стационарным**, если силы поля не зависят от времени. В противном случае поле называют **нестационарным**. Силы стационарного поля зависят только от координат находящихся в силовом поле тел, а силы нестационарного поля – от координат и от времени.

Стационарное поле называют **потенциальным** (**консервативным**), если работа сил поля не зависит от способа перемещения тела в данном поле из одного положения в другое, а зависит только от начального и конечного положения тела. Именно в потенциальных полях тела обладают потенциальной энергией. Отсюда и их название.

Силы, действующие на тела, помещённые в потенциальное поле, называют **консервативными силами**. Из определения потенциального поля следует, работа консервативной силы не зависит от траектории точки приложения силы, а определяется только её начальным и конечным положением. Исходя из этого нетрудно показать (см. Приложение 11), что **работа консервативной силы при перемещении точки приложения силы по замкнутой траектории равна нулю**.

Примеры консервативных сил (потенциальных полей): сила тяжести (однородное поле тяжести), сила упругости идеальной пружины (поле упругих сил), сила гравитационного взаимодействия неподвижных масс (стационарное гравитационное поле), сила взаимодействия неподвижных электрических зарядов (электростатическое поле).

Поле, полученное суперпозицией (наложением) потенциальных полей, также является потенциальным. Если тело, находящееся в сложном потенциальном силовом поле, после ряда перемещений вновь вернуть в исходное положение, то суммарная работа всех действующих на тело консервативных сил при таком перемещении будет равна нулю.

Потенциальная энергия материальной точки

Потенциальную энергию W_p материальной точки (частицы) определяют как "запас работы", которым обладает частица в данной точке потенциального поля. Покажем, что этот "запас работы" можно измерить работой консервативных сил поля, совершаемой при перемещении частицы из данной точки поля в другую точку.

Пусть частица, находящаяся в некоторой точке M_1 потенциального поля, обладает потенциальной энергией W_{p1}. Если эту частицу освободить от других влияний, то она будет перемещаться только под действием сил поля. При этом в каждом новом положении частицы её способность совершать работу, связанную именно с этим новым положением, будет уменьшаться. Следовательно, будет уменьшаться потенциальная энергия частицы.

Предположим, что переместившись в точку M_2 поля, частица стала обладать новой потенциальной энергией W_{p2}. Поскольку частица перемещается только под действием сил поля, и все другие влияния отсутствуют, делаем вывод, что работа консервативных сил поля определяется соотношением:

$$A = W_{p1} - W_{p2}. \tag{2.66}$$

Итак, при перемещении частицы из одной точки поля в другую консервативные силы поля совершают работу за счёт потенциальной энергии частицы. Если консервативные силы совершают положительную работу, то потенциальная энергия частицы убывает. **Работа консервативных сил равна убыли потенциальной энергии** частицы. Этот вывод определяет основные свойства потенциальной энергии как функции состояния механической системы.

Поскольку потенциальная энергия зависит от положения частицы в силовом поле, то она является функцией координат x, y, z частицы: $W_p(x, y, z)$. При любом элементарном перемещении частицы её потенциальная энергия получает приращение dW_p, которое вычисляется как полный дифференциал функции $W_p(x, y, z)$. Следовательно, при определении элементарной работы dA консервативных сил в формуле (2.66) следует положить: $W_{p2} = W_{p1} + dW_p$. Тогда

$$dA = -dW_p. \tag{2.67}$$

Элементарная работа консервативных сил равна взятому со знаком минус полному дифференциалу потенциальной энергии.

Соотношение (2.67) показывает, что элементарная работа консервативных сил вычисляется как полный дифференциал силовой функции $U(x, y, z) = -W_p(x, y, z)$. Поэтому элементарная работа консервативных сил обозначается dA, а не δA, как элементарная работа неконсервативных сил.

Если $dW_p < 0$ (потенциальная энергия при элементарном перемещении частицы уменьшается), то $dA > 0$, т.е. элементарная работа совершается консервативными силами за счет убыли потенциальной энергии частицы.

Если $dW_p > 0$ (потенциальная энергия при элементарном перемещении частицы увеличивается), то $dA < 0$. В этом случае элементарную работу совершают **сторонние силы**, действующие против сил поля (сторонними называют силы, имеющие иное, чем силы данного поля, происхождение).

Если потенциальная энергия при элементарном перемещении частицы не изменяется ($dW_p = 0$), то работа консервативных сил на этом перемещении равна нулю.

Используя правила вычисления полного дифференциала функции нескольких переменных и выражение для элементарной работы (2.54) можно получить (см. Приложение 11) следующие формулы для проекций консервативной силы на оси координат:

$$F_x = -\frac{\partial W_p}{\partial x}; \; F_y = -\frac{\partial W_p}{\partial y}; \; F_z = -\frac{\partial W_p}{\partial z}. \tag{2.68}$$

Проекции консервативной силы на оси координат равны взятым со знаком минус частным производным потенциальной энергии по соответствующим координатам.

Если в формулах (2.66) – (2.68) добавить к потенциальной энергии частицы любую постоянную величину, то результат применения этих формул не изменится. Например, подставим в (2.66) $W_{p1} + C$ вместо W_{p1} и $W_{p2} + C$ вместо W_{p2} ($C = const$). Результатом подстановки будет та же самая разность потенциальных энергий W_{p1} и W_{p2}. Подстановка $W_p + C$ вместо W_p в (2.67) и (2.68) также ничего не изменит, т.к. дифференциал и производная постоянной величины равны нулю.

Соотношения (2.66) – (2.68) показывают, что значение имеет не сама потенциальная энергия, а ее изменение. Поэтому **потенциальную энергию определяют с точностью до постоянного слагаемого**. Иными словами, точку начала отсчета потенциальной энергии (точку, в которой потенциальная энергия частицы равна нулю) можно выбирать произвольно.

Примем некоторую точку M_0 пространства в качестве начала отсчета потенциальной энергии (рис. 2.17). Пусть частица перемещается из точки M поля, где ее потенциальная энергия равна W_p, в точку M_0, где её потенциальная энергия равна нулю ($W_{p0} = 0$). Работа сил поля при таком перемещении:

$$A_0 = W_p - W_{p0} = W_p. \tag{2.69}$$

Отсюда следует, что потенциальная энергия частицы, находящейся в некоторой точке поля, численно равна работе консервативных сил, совершаемой при перемещении частицы из данной точки поля в точку, принятую в качестве начала отсчета потенциальной энергии.

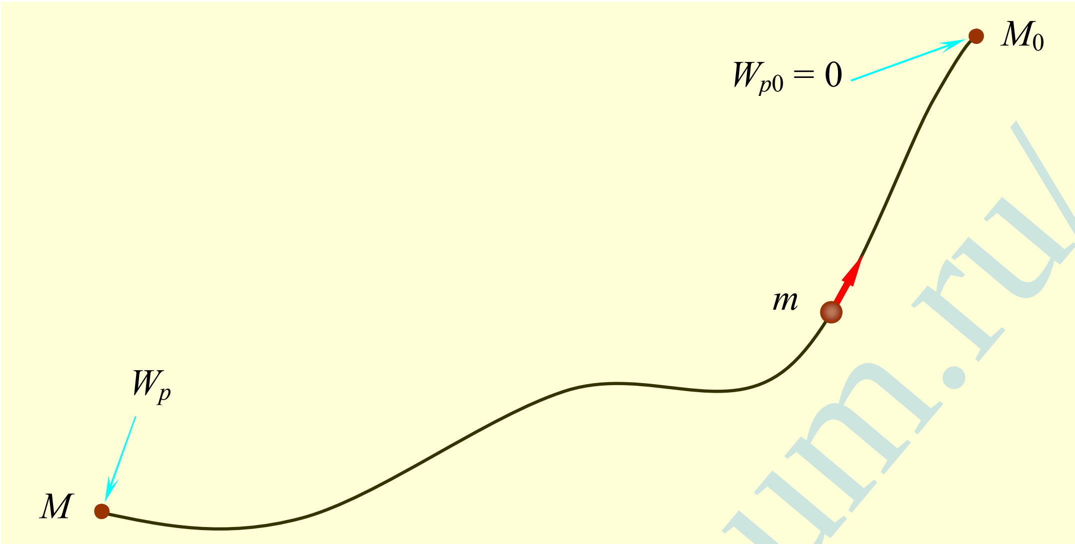

Рис. 2.17. Перемещение частицы в консервативном поле

Потенциальная энергия механической системы

Потенциальная энергия W_p механической системы складывается из потенциальных энергий W_{pi} всех её точек во внешних силовых полях и потенциальной энергии взаимодействия U между материальными точками системы:

$$W_p = \sum_{i=1}^{n} W_{pi} + U. \tag{2.70}$$

При вычислении потенциальной энергии U учитываются попарно все взаимодействия между материальными точками системы. Например, потенциальная энергия гравитационного взаимодействия между i-ой и k-ой точками системы вычисляется по формуле:

$$U_{ik} = -G\frac{m_i m_k}{r_{ik}},$$

где r_{ik} – расстояние между точками, а m_i, m_k – их массы. Полная потенциальная энергия гравитационного взаимодействия между точками системы:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i \neq k} U_{ik}.$$

Здесь учтено, что $U_{ik} = U_{ki}$, поэтому результат суммирования по всем $i \neq k$ поделён на два.

При перемещении механической системы суммарная работа всех действующих на неё консервативных сил равна убыли полной потенциальной энергии (2.70). Эта работа может вычисляться по формуле (2.66), где W_{p1}, W_{p2} – соответственно, значения полной потенциальной энергии механической системы в её начальном и конечном положениях.

Примеры вычисления потенциальной энергии материальной точки и механической системы приведены в Приложении 12.