2.10. Основной закон динамики вращательного движения

Теорема об изменении момента импульса находит важное применение при изучении динамики твёрдого тела. В частности, эта теорема позволяет достаточно просто описать вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси.

Поставим следующую задачу: найти **основное уравнение динамики вращательного движения**, которое было бы аналогом **основного уравнения динамики материальной точки** (2.8).

При вращении вокруг неподвижной оси твёрдое тело имеет одну степень свободы, поэтому динамика данного движения должна описываться одним уравнением. Следовательно, в отличие от векторного уравнения (2.8), искомое уравнение должно быть скалярным.

Применение теоремы об изменении момента импульса к динамике вращательного движения твёрдого тела

Рассмотрим абсолютно твёрдое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$ (рис. 2.15). Пусть на тело действует произвольная система внешних сил $\vec{F}_k^{внешн}$ ($k = 1, 2, \ldots, N$). Проведем ось Oz вдоль оси вращения. Воспользуемся уравнением (2.41) теоремы об изменении момента импульса механической системы в проекции на ось Oz:

$$\frac{dL_z}{dt} = M . \tag{2.42}$$

Здесь M – сумма моментов внешних сил относительно оси вращения тела (для краткости дополнительные индексы в этом обозначении опущены).

Момент импульса L_z тела относительно оси вращения найдем как сумму моментов импульса всех точек тела. Для этого выделим произвольно выбранную материальную точку тела с массой m_i (рис. 2.15). Эта точка движется по окружности радиуса R_i с центром O_i, лежащим на оси вращения. Импульс $\vec{p}_i$ выделенной материальной точки, так же как и её скорость $\vec{V}_i$, направлен перпендикулярно радиусу R_i. Следовательно, момент импульса $\vec{p}_i$ относительно оси Oz равен произведению $p_i R_i$.

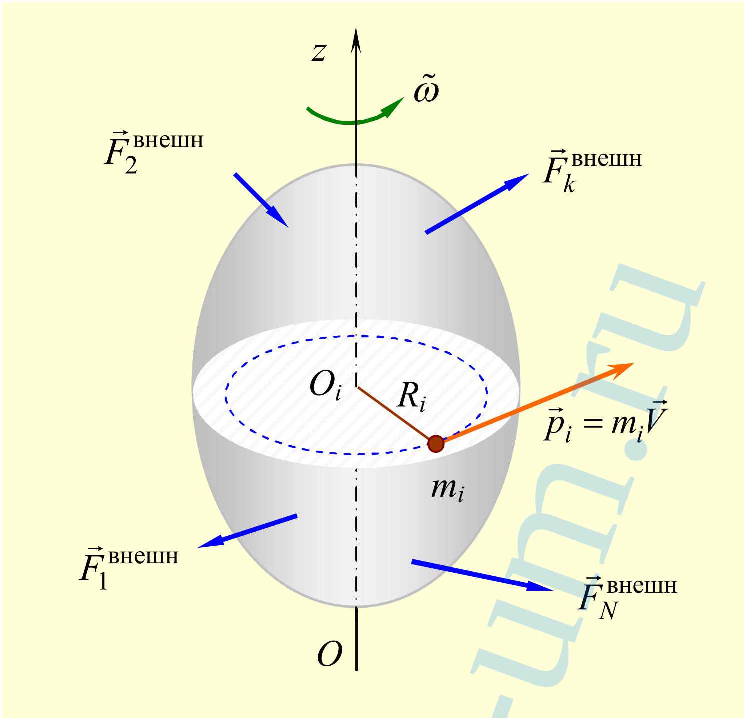

Рис. 2.15. Вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси

Складывая произведения $p_i R_i$ (i =1, 2, …, n) всех материальных точек тела и учитывая, что $p_i = m_i V_i$, получим:

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} p_i R_i = \sum_{i=1}^{n} m_i V_i R_i \,. \tag{2.43}$$

Подставим в (2.43) выражение $V_i = \tilde{\omega} R_i$ линейной скорости при вращательном движении и вынесем общий множитель $\tilde{\omega}$ за скобку:

$$L_z = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 \right) \tilde{\omega} \,. \tag{2.44}$$

Величина, стоящая в скобках соотношения (2.44), характеризует распределение масс тела относительно оси вращения.

Момент инерции тела относительно оси

Введем в рассмотрение величину

$$I_z = \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 \,. \tag{2.45}$$

Величину I_z называют **моментом инерции** тела относительно оси Oz.

Момент инерции тела относительно оси (**осевой момент инерции**) равен сумме произведений масс всех точек тела на квадраты их расстояний от данной оси.

Очевидно, осевой момент инерции можно вычислить относительно любой координатной оси: I_x, I_y, I_z. Индекс в обозначении момента инерции указывает ось, относительно, которой он вычисляется. Данный индекс опускают, если обозначать ось нет необходимости (например, если эта ось является единственной). Каждый осевой момент инерции является характеристикой распределения масс тела (механической системы) относительно соответствующей оси.

Единица осевого момента инерции в СИ: $[I] = 1\,кг \cdot м^2$.

Во многих случаях возникает необходимость рассчитать момент инерции тела относительно некоторой оси, если известен момент инерции тела относительно другой параллельной ей оси. Для этого используют теорему **Гюйгенса-Штейнера**. Согласно данной теореме моменты инерции тела относительно параллельных осей связаны соотношением:

$$I = I_C + md^2, \qquad (2.46)$$

где I – момент инерции тела относительно некоторой оси; I_C – момент инерции тела относительно параллельной оси, проходящей через центр масс C тела; d – расстояние между осями; m – масса тела.

Основное уравнение динамики вращательного движения

В выражении (2.44) величина, стоящая в скобках, является моментом инерции тела относительно оси вращения. Опуская индекс z в обозначении момента инерции, запишем это уравнение в форме:

$$L_z = I\tilde{\omega}. \qquad (2.47)$$

Момент импульса тела относительно оси вращения равен произведению момента инерции тела относительно оси вращения на угловую скорость тела.

Подставим (2.47) в (2.42). Учитывая, что момент инерции абсолютно твёрдого тела – величина постоянная ($I = const$), получим

$$I\frac{d\tilde{\omega}}{dt} = M. \qquad (2.48)$$

Уравнение (2.48) – одна из форм записи **основного уравнения динамики вращательного движения**.

Первая производная угловой скорости по времени равна второй производной по времени угла поворота тела. Тогда:

$$I\ddot{\varphi} = M . \tag{2.49}$$

Уравнение (2.49) – ещё одна форма записи **основного уравнения динамики вращательного движения**.

Наконец, учтём, что производная угловой скорости по времени равна угловому ускорению тела. Получим третью форму записи **основного уравнения динамики вращательного движения**:

$$I\tilde{\varepsilon} = M . \tag{2.50}$$

По аналогии с **основным законом динамики материальной точки**, полученный результат интерпретируют как **основной закон динамики вращательного движения**.

Основной закон динамики вращательного движения

Произведение момента инерции тела относительно оси вращения на его угловое ускорение равно сумме моментов действующих на тело внешних сил относительно оси вращения.

Если сравнить уравнение (2.50) с основным уравнением динамики точки (2.8), то становится очевидной аналогия: ускорение – угловое ускорение; сумма сил – сумма моментов сил; масса – момент инерции.

Поскольку масса тела является мерой инертности тела при поступательном движении, то по аналогии можно сделать следующий вывод: **момент инерции относительно оси вращения является мерой инертности тела при вращательном движении**.